ZUR EXISTENZ DES MØLLER-OPERATORS IM LEE-MODELL

Inauguraldissertation

zur Erlangung der Doktorwürde

der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Freien Universität Berlin

vorgelegt von

Abdul Latif CHOUDHURY

aus Dacca, Ost Pakistan

[1960]

aus dem Institut für Theoretische Physik

der Freien Universität Berlin

ZUR EXISTENZ DES MØLLER-OPERATORS IM LEE-MODELL

Inauguraldissertation

zur Erlangung der Doktorwürde

der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Freien Universität Berlin

vorgelegt von

Abdul Latif CHOUDHURY

aus Dacca, Ost Pakistan

aus dem Institut für Theoretische Physik

der Freien Universität Berlin

R. UNIV. BIBLIOTHEEK LEIDEN

5304/60.

Name des Dekans:	Prof. Dr. LUDWIG
Namen der Gutachter:	Prof. Dr. LUDWIG
	Prof. Dr. PÄSLER
Tag der mündlichen Prüfung:	28. Januar 1960 - 2. Februar 1960
" " Promotion:	27. Juli 1960

INHALTSVERZEICHNIS

	Einführung	I
Kap. A	Lee-Modell	1
Kap. B	Renormalisierung	14
Kap. C	Die Zeitabhängigkeit der Zustandsvektoren	19
Kap. D	Zeitliche Entwicklung der Zustandsvektoren	24
Kap. E	Existenz des Møller-Operators im Teilraum $\mathfrak{H}_{V;N\Theta}$	43
	Bemerkungen	51
Anhang 1	Eigenschaften der komplexen Funktion $h(z)$	53
Anhang 2	Gültigkeit der Laplace-Transformation	56
Anhang 3	Beschränktheit der Funktionen $f_i(x)$	61

EINFÜHRUNG

Seit der Einführung eines Modells in der Feldtheorie durch T. D. Lee [1] sind verschiedene Untersuchungen mit ihm durchgeführt worden. Die ursprüngliche Absicht von Lee war, ein Modell zu konstruieren, das man vollständig renormieren kann. Sein Versuch war erfolgreich. Das Modell erhielt elegante mathematische Gestalt von Källén und Pauli [2]. Die beiden Autoren zeigten aber, daß dieses Modell nicht nur einwandfreie physikalische Tatsachen beschreibt. Unter gewissen Voraussetzungen (im Limes für eine Punktquelle) erscheinen in diesem Modell einige anomale Zustände, die die S-Matrix nicht unitär machen. Später hat auch Weinberg [3] gezeigt, daß die Eigenwertgleichungen im Teilraum $\mathcal{H}_{2,1}$ (siehe Kap. A) komplexe Eigenwerte im Punktquellenlimes geben können.

Aber diese Schwierigkeiten haben die Bedeutung des Modells wegen seiner Einfachheit nicht vermindert. Außerdem scheinen solche anomalen Zustände gerade sehr interessant zu sein, weil die übliche Feldtheorie solche Anomalien zeigen kann [4]. Neuerdings hat die Heisenberg'sche Idee, den Hilbertraum durch eine nicht-definite Metrik zu erweitern, das Interesse für das Modell noch vergrößert. Heisenberg [5] hat diese Erweiterung ausführlich durch Einführung von Dipolgeisterzustä nden im Lee-Modell diskutiert.

Glaser und Källén [6] haben zerfallende V-Teilchenzustände diskutiert, wobei die Energie des V-Teilchens größer als die untere Schranke der Energie des N und θ -Teilchens $(m_V > m_N + \mu)$ angenommen wurde. Auch verschiedene japanische Autoren haben in dieser Richtung gearbeitet [7].

In der Feldtheorie ist das asymptotische Verhalten eines zeitabhängigen Operators für $t \to \infty$ immer noch eine offene Frage. In einer vernünftigen Theorie sollte z. B. der Møllerоperator $\Omega(t) = e^{iH_0 t} e^{-iHt}$ im $\lim_{t\to\infty} \Omega(t)$ in einem noch anzugebenden Konvergenzsinne für die

Streuzustände existieren. Die Konvergenz des Møllerоperators ist kürzlich für die Mehrkanalstreutheorie von Jauch [8], Grawert und Petzold [9] sowie Cook [10] untersucht worden. Unter speziellen Annahmen für das Potential kann man dort eine solche Frage beantworten. In der Feldtheorie fügt man öfter einen Konvergenzfaktor $e^{-\varepsilon|t|}$ zur Wechselwirkung ein, damit die Wechselwirkung für $t \to \infty$ verschwindet (siehe z. B. [11]). Aber es ist nicht gesagt, daß $\Omega(t)$ dabei existieren würde. Außerdem besteht hier die Gefahr darin, daß man damit auch das Selbstfeld gleichzeitig ausschaltet.

Diese Arbeit versucht nicht, alle diese Fragen zu beantworten. Wir untersuchen hier die Existenz des Møllerоperators unter einigen beschränkten Annahmen im Lee-Modell. Es wird gezeigt, daß der Møllerоperator existiert, wenn wir uns auf den Teilraum $\varphi_{\vartheta,0}$ beschränken, und wenn wir durch Massenrenormierung die Spektren von H und H_0 gleich machen. Die Existenzaussage gilt im Sinne der schwachen Konvergenz. Außerdem haben wir uns auf den Fall beschränkt, in dem die Zerfallsprozesse energetisch verboten sind, das heißt, wo $m_V < m_N + \mu$ ist. Der Beweis verwendet einen Abschneidefaktor $f(k)$, der die Konvergenz der erscheinenden Integrale gewährleistet. Für den Fall des Punktquellenlimes, also $f(k) = 1$, kann man nichts über die Konvergenz aussagen, obwohl sie bestehen könnte. Außerdem haben wir nur normierbare Vektoren, also z. B. mit Wellenpaketen, statt uneigentliche Eigenvektoren verwendet (siehe auch Jauch [8]).

Ohne Massenrenormierung, d. h. für den Fall, daß H und H_0 nicht dasselbe Spektrum haben, wird der Operator $\Omega(t) = e^{iH_0t}e^{-iHt}$ für $t \to \infty$ nicht existieren. Dieses Ergebnis ist auch vernünftig.

In Kapitel A wird das Lee-Modell kurz beschrieben. Zwei interessante Methoden der Renormierung haben wir in Kapitel B diskutiert. In Kapitel C wird die zeitabhängige Schrödingergleichung gelöst. In D wird das Verhalten des Zustandsvektors für $t \to \infty$ diskutiert. Kapitel E vervollständigt die Existenz des Møllerоperators.

Kapitel A

Lee-Modell

Die Konstruktion des Lee-Modells [2] beruht auf der Idee, daß drei Sorten von Teilchen, charakterisiert durch V, N, θ, vorhanden sind und die Wechselwirkung so beschaffen ist, daß nur Prozesse in Frage kommen,

$$V \rightleftarrows N + \theta \tag{1}$$

Der Hamilton-Operator ist im Impulsraum gegeben durch

$$H = H_0 + H_{int} \tag{2}$$

$$H_0 = m_V \int \psi_V^*(p)\, \psi_V(p)\, d^3p + m_N \int \psi_N^*(p)\, \psi_N(p)\, d^3p + \int \omega(k)\, a^*(k)\, a(k)\, d^3k \tag{2a}$$

$$H_{int} = -\int d^3p\, d^3p'\, d^3k\, F(k, g_0)\, \delta^3(p - p' - k) \cdot \left[\psi_V^*(p)\, \psi_N(p')\, a(k) + a^*(k)\, \psi_N^*(p')\, \psi_V(p) \right] \tag{2b}$$

$\psi_V(p)$, $\psi_N(p)$ und $a(k)$ sind nicht-renormierte Feldoperatoren in der Schrödinger-Darstellung und beziehen sich auf die V-, N-, θ-Teilchen. Die Funktion $F(k, g_0)$ ist definiert durch

$$F(k, g_0) = \frac{g_0\, f(k)}{\sqrt{\omega(k)}} \quad ; \quad \omega(k) = \sqrt{k^2 + \mu^2} \tag{3}$$

wobei g_0 die Kopplungskonstante und $f(k)$ eine "cut-off" Funktion ist. Die "cut-off" Funktion ist so zu wählen, daß sie alle Beiträge zu höheren Impulsen abdämpft und die Konvergenz der auftretenden Integrationen sichert. Das Modell ist nicht invariant gegen Lorentz-Transformationen. Wir haben die dreidimensionale δ-Funktion $\delta^3(p-p'-k)$ in der Wechselwirkung eingeführt, um den Impulserhaltungssatz zu gewährleisten.

Wir fordern wie üblich, daß die Feldoperatoren folgenden Vertauschungsbeziehungen genügen:

$$\left[\psi_\nu^*(p), \psi_\nu(p')\right]_+ = \left[\psi_N^*(p), \psi_N(p')\right]_+ = \delta^3(p-p') \tag{4}$$

$$\left[\psi_\nu(p), \psi_\nu(p')\right]_+ = \left[\psi_N(p), \psi_N(p')\right]_+ = \cdots = 0 \tag{5}$$

$$\left[a(k), a^*(k')\right]_- = \delta^3(k-k') \tag{6}$$

$$\left[a(k), \psi_\nu(p)\right]_- = \left[a(k), \psi_N(p')\right]_- = \cdots = 0 \tag{7}$$

Mit diesen Kommutatoren und mit Hilfe des Teilchenzahloperators N

$$N = \int d^3p\ \psi_\nu^*(p)\,\psi_\nu(p) + \int d^3p\ \psi_N^*(p)\,\psi_N(p) + \int d^3k\ a^*(k)\,a(k) \tag{8}$$

können wir die übliche Darstellung des Hilbertraumes konstruieren. Es ist offensichtlich, daß N mit H_0 vertauschbar ist. Die Eigenvektoren zu N bezeichnen wir durch

$$|p_1, \ldots p_i; p'_1, \ldots p'_j; k_1, \ldots k_l\rangle$$

$$= \psi_V^*(p_1) \ldots \psi_V^*(p_i)\, \psi_N^*(p'_1) \ldots \psi_N^*(p'_j)\, a^*(k_1) \ldots a^*(k_l)\, |0;0;0\rangle \tag{9}$$

wo $$N\,|0;0;0\rangle = 0 \tag{9a}$$

ist. Hier ist $|0;0;0\rangle = |0\rangle$ der "nackte" Teilchenvakuum-Zustand, d.h. Eigenvakuum zu H_0. Wegen der Vertauschbarkeit $[N, H_0] = 0$ sind die Zustände (9) auch Eigenzustände von H_0. Diese Zustände sind uneigentliche Zustände des kontinuierlichen Impuls-Spektrums der freien Teilchen.

Um die Eigenzustände des gesamten Hamilton-Operators zu finden, betrachten wir zwei Operatoren:

$$Q_1 = \int d^3p\, \psi_V^*(p)\, \psi_V(p) + \int d^3p\, \psi_N^*(p)\, \psi_N(p) \tag{10}$$

$$Q_2 = \int d^3p\, \psi_N^*(p)\, \psi_N(p) + \int d^3k\, a^*(k)\, a(k) \tag{11}$$

Man überzeugt sich leicht, daß die beiden Operatoren mit H vertauschbar sind.

$$[Q_i, H] = 0 \quad ; \quad i = 1, 2 \tag{12}$$

Außerdem gilt

$$[N, Q_i] = 0 \quad ; \quad i = 1, 2 \tag{13}$$

Also sind die Zustände (9) auch Eigenzustände der Operatoren Q_i . Außerdem sind die Eigenzustände von H Linearkombinationen der Eigenvektoren von Q_i , die zu denselben Eigenwerten q_i gehören. Das heißt, der durch die Vektoren (9) konstruierte Hilbertraum zerfällt in Teilräume, die durch H in sich übergeführt werden. Man kann schreiben:

$$\mathcal{H} = \sum \oplus \mathcal{H}_{q_1 q_2} = \mathcal{H}_{00} \oplus \mathcal{H}_{01} \oplus \mathcal{H}_{11} \oplus \mathcal{H}_{10} \oplus \cdots\cdots \tag{14}$$

wobei

$$Q_i \mathcal{H}_{q_1 q_2} = q_i \mathcal{H}_{q_1 q_2} \tag{15}$$

ist und

$$H \mathcal{H}_{q_1 q_2} \subseteq \mathcal{H}_{q_1 q_2} \tag{15a}$$

Der einfachste Fall ist gegeben durch $q_1 = q_2 = 0$

Der Raum $\mathcal{H}_{00}$ enthält nur einen Vektor $|0;0;0\rangle = |0\rangle$ der deswegen auch Eigenzustand des gesamten Hamilton.-Operators H mit dem Eigenwert 0 ist. Mit anderen Worten, das nackte und das physikalische Vakuum fallen im Lee-Modell zusammen. Die Teilräume $\mathcal{H}_{01}$, $\mathcal{H}_{11}$ sind durch die $|0;0;k\rangle$ allein bzw. $|0;p;0\rangle$ allein aufgespannt. Diese Vektoren sind selbst Eigenvektoren zu H , wovon man sich auch leicht direkt überzeugt. Daraus folgt, daß "nackte" N- und θ -Teilchen gleich den betreffenden physikalischen Teilchen sind.

Für den Fall $q_1 = 1$, $q_2 = 0$ enthält der Raum $\mathcal{H}_{10} = \mathcal{H}_{V;N\theta}$ nur die Vektoren $|p;0;0\rangle$ und $|0;p';k\rangle$, und jeden Vektor $|z\rangle$ aus diesem Teilraum kann man schreiben:

$$|z\rangle = \int d^3p\ \alpha(p)\,|p;0;0\rangle + \int d^3p\,d^3k\ \varphi(k,p)\,|0;p-k;k\rangle \tag{16}$$

Wir versuchen jetzt, solche Vektoren (16) herauszugreifen, die Eigenvektoren zu H sind. Die Lösung der zeitunabhängigen Schrödinger-Gleichung liefert Bedingungen für $\alpha(p)$ und $\varphi(k,p)$.

$$H|z\rangle = (H_0 + H_{int})\,|z\rangle = E\,|z\rangle \tag{17}$$

Wenn wir H_0 aus (2) auf $|z\rangle$ anwenden, bekommen wir

$$H_0|z\rangle = \int d^3p\ m_\nu\,\alpha(p)\,|p;0;0\rangle + \int d^3p\,d^3k\ \left[m_N + \omega(k)\right]\varphi(k,p)\,|0;p-k;k\rangle$$

Ähnlich erhalten wir

$$H_{int}|z\rangle = -\int d^3p''\,d^3p'\,d^3k\ F(k,g_0)\,\delta^3(p''-p'-k)\,a^*(k)\,\psi_N^*(p')\,\psi_\nu(p'')$$
$$\cdot\ d^3p\ \alpha(p)\,\psi_\nu^*(p)\,|0\rangle$$

$$-\int d^3p''\,d^3p'\,d^3k'\ F(k',g_0)\,\delta^3(p''-p'-k')\,\psi_\nu^*(p'')\,\psi_N(p')\,a(k')$$
$$\cdot\ \int d^3p\,d^3k\ \varphi(k,p)\,\psi_N^*(p-k)\,a^*(k)\,|0\rangle$$

Durch Anwendung der Vertauschungsbeziehungen (4)-(7) ergibt sich

$$H_{int}|z\rangle = -\int d^3p\,d^3k\ F(k,g_0)\,\alpha(p)\,|0;p-k;k\rangle$$
$$-\int d^3p\,d^3k\ F(k,g_0)\,\varphi(k,p)\,|p;0;0\rangle \tag{18}$$

Aus (17) folgt

$$\int d^3p \left[m_V \alpha(p) - \int d^3k \; F(k,g_0)\, \varphi(k,p) - E\,\alpha(p) \right] |p,0;0\rangle$$

$$+ \int d^3p\, d^3k \left[\left\{ m_N + \omega(k) \right\} \varphi(k,p) - F(k,g_0)\alpha(p) - E\varphi(k,p) \right] \times |0;p-k;k\rangle \qquad (19)$$

$$= 0$$

Weil $|p;0;0\rangle$ und $|0;p-k;k\rangle$ linear unabhängige Vektoren sind, erhalten wir als Bedingungen für die Entwicklungskoeffizienten $\alpha(p)$, $\varphi(k,p)$:

$$m_V\, \alpha(p) - \int d^3k \; F(k,g_0)\, \varphi(k,p) - E\,\alpha(p) = 0 \qquad (20a)$$

$$\left[m_N + \omega(k) \right] \varphi(k,p) - F(k,g_0)\,\alpha(p) - E\,\varphi(k,p) = 0 \qquad (20b)$$

oder

$$\left[E - \left\{ m_N + \omega(k) \right\} \right] \varphi(k,p) + F(k,g_0)\,\alpha(p) = 0 \qquad (21a)$$

$$\left[E - m_V \right] \alpha(p) + \int d^3k \; F(k,g_0)\, \varphi(k,p) = 0 \qquad (21b)$$

Zuerst beschränken wir uns auf den Fall

$$E < m_N + \mu \qquad (22)$$

Aus (21a) bekommen wir für $\varphi(k,p)$

$$\varphi(k,p) = \frac{F(k,g_0)\ \alpha(p)}{m_N + \omega(k) - E} \tag{23}$$

Wir setzen jetzt diesen Wert in (21b) ein und erhalten:

$$\left[E - m_V + \int \frac{d^3k\ F^2(k,g_0)}{m_N + \omega(k) - E} \right] \alpha(p) = 0 \tag{24}$$

Wenn wir

$$\underline{h}(E) = E - m_V + \int \frac{d^3k\ F^2(k,g_0)}{m_N + \omega(k) - E} \tag{25}$$

setzen, ergibt sich aus (24) entweder

a) $\alpha(p) = 0$, $\underline{h}(E) \neq 0$

oder b) $\alpha(p) \neq 0$, $\underline{h}(E) = 0$

Der erste Fall gibt keinen Eigenvektor zu H , wie man direkt sieht. Die zweite Bedingung gibt uns die Eigenwertgleichung für den Fall $E < m_N + \mu$:

$$\underline{h}(E) = 0 \tag{26}$$

Daß die Gleichung (26) für reelle $m_V < m_N + \mu$ mindestens eine Lösung hat, kann man leicht sehen. Wir schreiben

$$S(E) = \int \frac{d^3k\ F^2(k,g_0)}{m_N + \omega(k) - E} \tag{27}$$

Die Ableitung von $S(E)$ $(E < m_N + \mu)$

$$\frac{d\,S(E)}{dE} = \int \frac{d^3k\, F^2(k, g_0)}{(m_N + \omega(k) - E)^2} \tag{28}$$

ist immer positiv. Außerdem gilt für $E \longrightarrow -\infty$

$S(E) \longrightarrow 0$

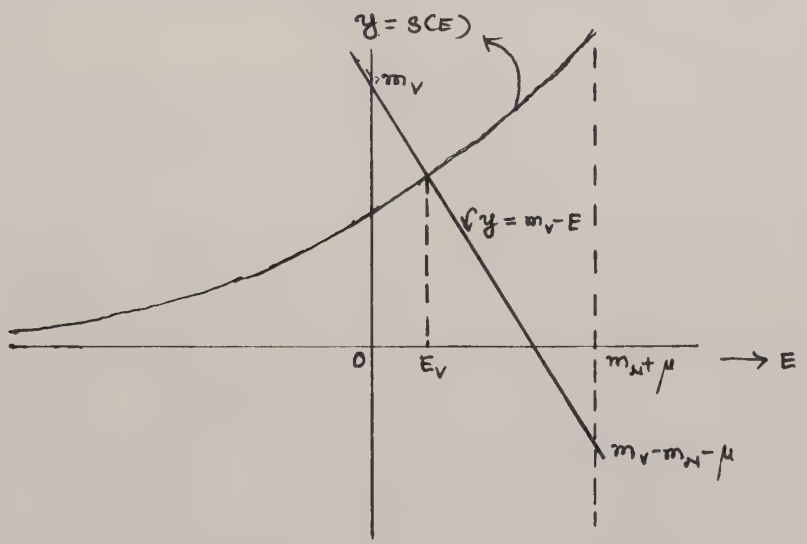


Bild 1.

Bild 1 zeigt die Funktion $y = S(E)$

Die Gerade $y = m_V - E$ schneidet die Kurve $y = S(E)$ an der Stelle $E = E_V$. Das heißt

$$h(E_V) = 0 \tag{29}$$

Diese diskrete Lösung entspricht physikalischen $|V\rangle$ Teilchen. Wenn wir die Zustandsvektoren von V -Teilchen durch $|V\rangle$ bezeichnen, erhalten wir für $|V\rangle$ aus (16) und (23)

$$|V\rangle = \int d^3p\, \alpha^V(p) \left[|p;0;0\rangle + \int \frac{d^3k\, F(k, g_0)}{m_N + \omega(k) - E_V} |0; p-k; k\rangle \right] \tag{30}$$

wobei $\alpha^{\nu}(\mathfrak{p})$ eine beliebige Impulsverteilung der nackten Teilchenzustände ist.

Aus (30) sieht man, daß wir dem physikalischen V-Teilchen keinen Impuls zuschreiben können. Wir werden im folgenden mit den speziellen V -Teilchenzuständen rechnen, bei denen

$$\alpha^{\nu}(\mathfrak{p}) = \alpha^{\nu}(\mathfrak{p}_0)\, \delta^3(\mathfrak{p}-\mathfrak{p}_0) \tag{30a}$$

ist.

Der so definierte Zustandsvektor ist dann

$$|V\rangle_{\mathfrak{p}_0} = \alpha^{\nu}(\mathfrak{p}_0)\left[|\mathfrak{p}_0;0,0\rangle + \int \frac{d^3k\, F(k,\vartheta_0)}{m_N+\omega(k)-E_V}\, |0;\mathfrak{p}_0-k,k\rangle\right] \tag{30b}$$

was ein uneigentlicher Zustand in bezug auf den Impuls $\mathfrak{p}_0$ ist.

Wir können uns (30) so normiert denken, daß

$$\langle V|V\rangle = 1 \tag{31}$$

ist, woraus

$$\left[\int |\alpha^{\nu}(\mathfrak{p})|^2 d^3\mathfrak{p}\right]^{-1} = 1 + \int \frac{d^3k\, F^2(k,\vartheta_0)}{(m_N+\omega(k)-E_V)^2} \tag{32}$$

folgt. Wenn wir aber (30a) verwenden, müssen wir die Norm durch

$${}_{\mathfrak{p}_0'}\langle V'|V\rangle_{\mathfrak{p}_0} = \delta(\mathfrak{p}_0-\mathfrak{p}_0') \tag{31a}$$

definieren, woraus

$$|\alpha^{\nu}(\mathfrak{p}_0)|^{-2} = 1 + \int \frac{d^3k\, F^2(k,\vartheta_0)}{[m_N+\omega(k)-E_V]^2} \tag{32a}$$

folgt.

Die Gleichung (26) kann unter Umständen auch zwei Lösungen haben. Die Ableitung von $\underline{h}$ ist

$$\frac{d\underline{h}(E)}{dE} = 1 + \int \frac{d^3k\, F^2(k,g_0)}{[m_N + \omega(k) - E]^2} \tag{33}$$

Wählen wir g_0 rein imaginär, dann ist

$$\frac{d\underline{h}(E)}{dE} = 1 - \int \frac{d^3k\, F^2(k,|g_0|)}{[m_N + \omega(k) - E]^2} \tag{34}$$

Wenn wir fordern

$$\int \frac{d^3k\, F^2(k,|g_0|)}{\omega(k) - \mu} > 1 \tag{35}$$

dann wird

$$\frac{d\underline{h}(E)}{dE} < 0 \qquad \text{für} \quad E > E_0$$

und

$$\frac{d\underline{h}(E)}{dE} > 0 \qquad \text{für} \quad E < E_0$$

wobei E_0 durch die Gleichung

$$\frac{d\underline{h}(E)}{dE} = 0 \tag{36}$$

bestimmt ist.

Für $E \longrightarrow -\infty$ ist $\frac{d\underline{h}(E)}{dE} = 1$

und

$$\frac{d^2\underline{h}(E)}{dE^2} = -2 \int \frac{d^3k\, F^2(k,|g_0|)}{(m_N + \omega(k) - E)} < 0 \quad \text{für} \quad E < m_N + \mu$$

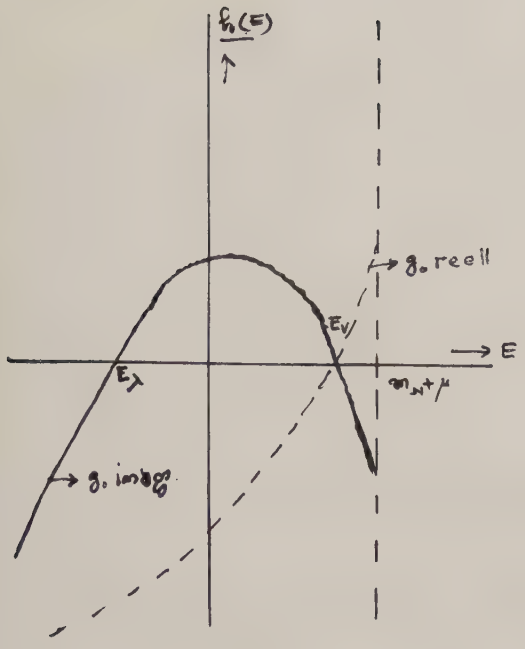


Bild 2

Für geeignete m_ν und $|g_0|$ kann die Funktion $\underline{h}(E)$ wie in der nebenstehenden Figur verlaufen. $\underline{h}(E)$ ist Null an den Stellen $E = E_\nu$ und $E = E_\lambda$. Nach (32) ist

$$\left[\int |\alpha^\nu(\vec{p})|^2 d^3p \right]^{-1} = \frac{d\underline{h}(E)}{dE}$$

Wenn wir $\alpha^\nu(\vec{p}) = \sqrt{\delta^3(\vec{p}-\vec{p}_0)} \sqrt{\left|\frac{d\underline{h}}{dE}\right|}$

wählen. ist leicht zu sehen, daß $\frac{d\underline{h}}{dE}$ das Vorzeichen der Norm angibt. In unserem Fall hat der Vektor zu E_λ positive Norm, während der zu E_ν negative Norm hat. Solche Lösungen mit negativer Norm sind von Källèn und Pauli [2] untersucht worden und werden in der Feldphysik "Ghoststates" genannt.Wir werden hier nicht die "Ghoststates" diskutieren.

Noch eine andere Möglichkeit ist von Heisenberg [5] untersucht worden, der die beiden Eigenwerte durch geeignete Wahl von m_ν und g_0 zusammenfallen läßt.

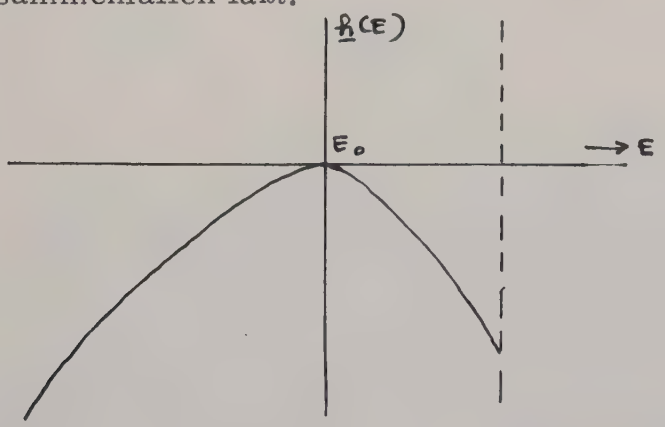


Bild 3

Wir berücksichtigen jetzt den Fall $E > m_N + \mu$, d.h. die NΘ -Streuung. Üblicherweise löst man die Gleichung (21a) durch

$$\varphi(\vec{k},\vec{p}) = a(\vec{p})\, \delta\left(E - m_N - \omega(k)\right) + \frac{F(k, g_0)\, \alpha(\vec{p})}{m_N + \omega(k) - E \mp i\varepsilon} \qquad (37)$$

E durchläuft das kontinuierliche Spektrum und $\varphi(k,\mathfrak{p})$ ist im Ortsraum eine Überlagerung der ein- (aus-)laufenden ebenen Welle und der aus- (ein-)laufenden Kugelwellen, charakterisiert durch den additiven Term $-i\epsilon$ $(+i\epsilon)$ im Nenner des zweiten Terms der Gleichung (37). $a(\mathfrak{p})$ kann hier eine beliebige Funktion von $\mathfrak{p}$ sein. Statt (37) ist es zweckmäßig, $\varphi(k,\mathfrak{p})$ in der folgenden Form zu wählen, was auch eine Lösung der Gleichung (21a) darstellt:

$$\varphi_{\pm}(k,\mathfrak{p}) = a(\mathfrak{p})\,\delta^3(k-k_0) + \frac{F(k,g_0)\,\alpha(\mathfrak{p})}{m_N + \omega(k) - E \mp i\epsilon} \tag{38}$$

wo wir $E = m_N + \omega(k_0)$ gesetzt haben.

Aus (21b) erhält man

$$\left[(E-m_V) + \int \frac{d^3k\, F^2(k,g_0)}{m_N + \omega - E \mp i\epsilon}\right] \alpha_{\pm}(\mathfrak{p}) = -\,a(\mathfrak{p})\,F(k,g_0)$$

Daraus folgt

$$\alpha_{\pm}(\mathfrak{p}) = -\frac{a(\mathfrak{p})\,F(k_0,g_0)}{h(E \pm i\epsilon)} = \alpha^s_{\pm}(k_0)\,a(\mathfrak{p}) \tag{39}$$

wobei wir einführten

$$\alpha^s_{\pm}(k_0) = -\frac{F(k_0,g_0)}{h(E \pm i\epsilon)} \tag{40}$$

Die Zustände

$$|N\theta\rangle_{in/out} = \int d^3\mathfrak{p}\; a(\mathfrak{p}) \left[\alpha^s_{\pm}(k_0)\,|\mathfrak{p};\omega,0\rangle + \int d^3k\; \varphi^s_{\pm}(k,k_0)\,|0;\mathfrak{p}-k;k\rangle\right] \tag{41}$$

mit

$$\varphi^s_{\pm}(k,k_0) = \delta^3(k-k_0) + \frac{F(k,g_0)\,\alpha^s_{\pm}(k_0)}{m_N + \omega - E \mp i\epsilon} \tag{42}$$

beschreiben jetzt die Streuung von θ -an N-Teilchen. Wohlgemerkt kann $a(p)$ beliebig sein, wir wählen aber $a(p) = \delta^3(p - p_0)$ Das heißt,

$$|N\theta\rangle^{in}_{out} = \alpha^s_{\pm}(k_0)|p_0;0;0\rangle + \int d^3k\, \varphi^s_I(k,k_0)\,|0;p_0-k;k\rangle \tag{41'}$$

ist unser $N\theta$ -Streuzustand.

Aus (42) und (40) folgt sofort die Phasenverschiebung

$$\tan\delta(E) = \frac{\mathrm{Im}\,\underline{f}(E)}{\mathrm{Re}\,\underline{f}(E)} = \frac{\Gamma(E)}{\underline{f}(E)} \tag{43}$$

wobei (siehe Anhang 1)

$$\Gamma(E) = 4\pi^2 |k_0|\omega_0 F^2(k,g_0)\,\theta(\omega_0-\mu)$$

$$E = m_N + \omega_0 = m_N + \sqrt{k_0^2+\mu^2} \tag{44}$$

und

$$\underline{f}(E) = E - m_v + P\int \frac{d^3k\, F^2(k,g_0)}{m_N+\omega-E} \tag{45}$$

Kapitel B

Renormalisierung

Die eigentliche Absicht von Lee [1] war, die Frage der Renormalisation zu untersuchen, als er dieses Modell vorgeschlagen hatte. Er zeigte, daß das Modell vollständig renormierbar ist. Danach haben verschiedene Autoren in verschiedener Weise die Renormierung durchgeführt. Wir werden hier nur zwei Methoden ausführlich beschreiben.

Die erste Methode stammt von Lee selbst. Wie in der Feldtheorie üblich, wird die Massenrenormierung durch Addition eines zusätzlichen Terms im Hamilton-Operator A (2a)

$$\delta H = -\delta m \int d^3p \; \psi_V^*(p)\, \psi_V(p) \tag{1}$$

durchgeführt, d.h. wir brauchen nur im vorigen Kapitel alle m_V durch $m_V - \delta m_V$ zu ersetzen. Die Gleichung für die diskreten Zustände A (26) lautet jetzt:

$$h(E) = E - (m_V - \delta m) + \int \frac{d^3k \; F^2(k, g_0)}{\hat{\omega} - E} \tag{2}$$

$$\hat{\omega} = m_N + \omega$$

Wir wählen δm so, daß die beobachtbare Masse des physikalischen V-Teilchens mit m_V zusammenfällt, das heißt

$$h(m_V) = 0 \tag{3}$$

woraus

$$\delta m = -\int \frac{d^3k \; F^2(k, g_0)}{\hat{\omega} - m_V} \tag{4}$$

folgt. Die Eigenwertgleichung wird dann

$$h(E) = (E - m_v)\left[1 + \int \frac{d^3k\, F^2(k,g_0)}{(\hat{\omega} - m_v)(\hat{\omega} - E)}\right] \tag{5}$$

Die "Renormierung der Kopplungskonstanten" führt man mit Hilfe der Definition

$$g^2 = z^{-2} g_0^2 \tag{6}$$

durch, wo

$$z^2 = 1 + \int \frac{d^3k\, F^2(k,g_0)}{(\hat{\omega} - m_v)^2} \tag{7}$$

oder

$$z^{-2} = 1 - \int \frac{d^3k\, F^2(k,g)}{(\hat{\omega} - m_v)^2} \tag{7'}$$

ist.

Die Gleichung (2) kann man jetzt durch das renormierte g ausdrücken. Multiplizieren wir (2) mit z^{-2}, dann erhalten wir

$$\tilde{h}(E) = z^{-2} h(E) = (E - m_v)\left[1 + \int \frac{d^3k\, F^2(k,g_0)\,(E - m_v)}{(\hat{\omega} - m_v)^2 (\hat{\omega} - E)}\right] = 0 \tag{8}$$

Die physikalischen Größen, wie $\tan \delta(E)$ in A (43) für Nθ-Streuung, kann man nun durch das renormierte g und m_v ausdrücken. Aus A (44) und A (45) folgt

$$\tan \delta(E) = \frac{g\pi^2 |k_0|\, \omega_0\, \Gamma^2(k,g_0)}{E - m_v + \delta m + P \int \frac{d^3k\, F(k,g_0)}{\hat{\omega} - E}}$$

$$= \frac{z^{-2}\left[4\pi^2 |k_0|\,\omega_0\, F^2(k,g_0)\right]}{z^{-2}\left[E-(m_v-\delta m)+P\int \frac{d^3k\, F^2(k,g_0)}{\hat{\omega}-E}\right]}$$

$$= \frac{4\pi^2 |k_0|\,\omega_0\, F(k_0,g)}{(E-m_v)\left[1+(E-m_v)\,P\int \frac{d^3k\, F^2(k,g)}{(\hat{\omega}-m_v)^2(\hat{\omega}-E)}\right]} \qquad (9)$$

Man sieht, daß die Phasenverschiebung nur durch die renormierten physikalischen Größen ausgedrückt ist.

Die zweite Methode stammt von Källen [12] . Nach Durchführung der Massenrenormierung ist die Phasenverschiebung

$$\frac{\tan\delta}{|k_0|} = \frac{4\pi^2\,\omega_0\, F^2(k_0,g_0)}{(E-m_v)\left[1+P\int \frac{d^3k\, F^2(k,g_0)}{(\hat{\omega}-m_v)(\hat{\omega}-E)}\right]} \qquad (10)$$

wobei natürlich $E = \hat{\omega}_0 = m_N + \sqrt{k_0^2+\mu^2}$ ist.

Weil $\left[\frac{\tan\delta(E)}{|k_0|}\right]_{|k_0|\to 0} = a$, die Streulänge, eine beobachtbare Größe ist, können wir g_0^2 in a ausdrücken:

$$\left[\frac{\tan\delta}{|k_0|}\right]_{|k_0|\to 0} = a = \frac{4\pi^2 g_0 f^2(0)}{(m_N+\mu-m_v)\left[1+g_0^2 P\int \frac{d^3k\, f^2(k)}{\omega(k)[\hat{\omega}-m_v][\omega-\mu]}\right]}$$

woraus folgt:

$$\frac{1}{g_0^2} = \frac{4\pi^2 f^2(0)}{a(m_N+\mu-m_v)} - P\int \frac{d^3k\, f^2(k)}{\omega(\hat{\omega}-m_v)(\omega-\mu)} \qquad (11)$$

Wenn wir (11) in (10) einsetzen, erhalten wir für die Phasenverschiebung:

$$\frac{\tan\delta(E)}{|k_0|} = \frac{4\pi^2 f^2(k_0)}{(E-m_v)\left[\frac{4\pi^2 f^2(0)}{a(m_N+\mu-m_v)} + P\int \frac{d^3k\, f^2(k)(E-m_N-\mu)}{\omega(\hat{\omega}-m_v)(\omega-\mu)(\hat{\omega}-E)}\right]} \tag{12}$$

D. h. $\tan\delta(E)$ wird durch physikalisch beobachtbare Größen ausgedrückt: Daß die Methode im wesentlichen die "Renormierung der Kopplungskonstanten" gibt, kann man leicht sehen. Wenn man mit Hilfe der Störungsrechnung $\frac{\tan\delta(E)}{|k_0|}$ nach g_0 entwickelt (vorausgesetzt g_0 ist klein), erhält man in erster Näherung

$$\frac{\tan\delta(E)}{|k_0|} = \frac{4\pi^2 f^2(k_0)\, g_0^2}{(E-m_v)} \tag{13}$$

Daraus folgt

$$a_{gert} = \left[\frac{\tan\delta(E)}{|k_0|}\right]_{|k_0|\to 0} = \frac{4\pi^2 f^2(0)\, g_0^2}{m_N+\mu-m_v} \tag{14}$$

Wir definieren ein g analog zu (14), das statt a_{gert} die exakte Streulänge a wiedergibt, durch folgende Beziehung

$$\left[\frac{\tan\delta(E)}{|k_0|}\right]_{|k_0|\to 0} = a = \frac{4\pi^2 f^2(0)\, g^2}{m_N+\mu-m_v} \tag{15}$$

Aus (12) folgt, wenn wir (15) ausnutzen

$$\frac{\tan\delta(E)}{|k_0|} = \frac{4\pi^2 g^2 f^2(k)}{E_0-m_v} \cdot \frac{1}{1+g^2[E-\mu]\, P\int \frac{d^3k\, f^2(k)}{\omega[\hat{\omega}-m_v][\omega-\omega_0][\omega-\mu]}} \tag{16}$$

Der Ausdruck ist ähnlich wie (9). Aus (11) und (15) erhalten wir

$$\frac{1}{g_0^2} = \frac{1}{g^2} - \int \frac{d^3k \, f^2(k)}{\omega(\omega-\mu)(\hat{\omega}-\mu)} \tag{17}$$

Ähnliche Beziehungen zwischen g_0 und g sind in der Feldtheorie schon längst bekannt.

Kapitel C

Die Zeitabhängigkeit der Zustandsvektoren im Lee-Modell

Das zeitabhängige Verhalten der Zustandsvektoren kann man nach Glaser und Källen [6] explizit ausrechnen. Man löst für jeden Zustandsvektor $|z,t\rangle$ aus dem Teilraum $\mathfrak{H}_{V;N\Theta}$ die Schrödingergleichung

$$H|z,t\rangle = i\frac{\partial}{\partial t}|z,t\rangle \tag{1}$$

wobei, wie wir wissen, jedes $|z,t\rangle$ sich folgendermaßen entwickeln läßt:

$$|z,t\rangle = \int d^3p\ \alpha(p;t)\,|p;0;0\rangle + \int d^3p\, d^3k\ \varphi(k,p;t)\,|0;p-k;k\rangle \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgen zwei zeitabhängige linear gekoppelte Gleichungen für die Entwicklungskoeffizienten $\alpha(p;t)$ und $\varphi(k,p;t)$

$$i\frac{\partial}{\partial t}\alpha(p;t) = (\omega_v - \delta\omega)\,\alpha(p;t) - \int d^3k\ F(k,p_0)\,\varphi(-k,p;t) \tag{3}$$

$$i\frac{\partial}{\partial t}\varphi(k,p;t) = (\omega_N + \omega)\,\varphi(k,p;t) - F(k,p_0)\,\alpha(p;t) \tag{4}$$

Diese Gleichungen erhält man durch Anwendung von H, definiert durch A (2) plus dem Massennormierungsterm δH, B (1) auf $|z,t\rangle$ und dann durch Koeffizientenvergleich der linear unabhängigen Zustandsvektoren $|p;0;0\rangle$ und $|0;p-k;k\rangle$.

Wir versuchen jetzt, die beiden Gleichungen durch Laplace-Transformation zu lösen. Dafür führen wir einseitige Laplace-Transformierte $\alpha(\mathfrak{p},E)$ und $\varphi(\mathfrak{k},\mathfrak{p};E)$ ein, definiert durch

$$\alpha(\mathfrak{p};E) = \int_0^\infty e^{-Et}\,\alpha(\mathfrak{p};t)\,dt \tag{5}$$

$$\varphi(\mathfrak{k},\mathfrak{p};E) = \int_0^\infty e^{-Et}\,\varphi(\mathfrak{k},\mathfrak{p};t)\,dt \tag{6}$$

unter der Voraussetzung

$$\mathrm{Re}\ E > 0$$

und

$$\alpha(\mathfrak{p};t) = 0 \ ; \ \varphi(\mathfrak{k};\mathfrak{p};t) = 0 \qquad \text{für } t<0$$

Es gilt für $i\frac{\partial}{\partial t}\alpha(\mathfrak{p};t)$

$$i\int_0^\infty e^{-Et}\frac{\partial}{\partial t}\alpha(\mathfrak{p};t)\,dt = i\,\alpha(\mathfrak{p};t)\,e^{-Et}\Big|_0^\infty + iE\int_0^\infty \alpha(\mathfrak{p};t)\,e^{-Et}\,dt$$

$$= -i\,\alpha_0(\mathfrak{p}) + iE\,\alpha(\mathfrak{p};E) \tag{7}$$

Wegen $\mathrm{Re}\ E>0$ verschwindet oben e^{-Et} für $t\to\infty$. $\alpha_0(\mathfrak{p})$ ist der Wert von $\alpha(\mathfrak{p};t)$ für $t=0$.

Entsprechend bekommen wir für $\varphi(\mathfrak{k};\mathfrak{p};t)$

$$i\int_0^\infty e^{-Et}\frac{\partial}{\partial t}\varphi(\mathfrak{k},\mathfrak{p};t)\,dt = -i\,\varphi_0(\mathfrak{k},\mathfrak{p}) + iE\,\varphi(\mathfrak{k},\mathfrak{p};E) \tag{8}$$

Daraus folgen zwei Gleichungen für $\alpha(p;E)$ und $\varphi(k,p;E)$

$$E\,\alpha(p;E) - \alpha_0(p) = -i\,(m_v - \delta m)\,\alpha(p;E) + i\int d^3k\, F(k,g_0)\,\varphi(k,p;E) \tag{9}$$

$$E\,\varphi(k,p;E) - \varphi_0(k;p) = -i(m_N + \omega(k))\,\varphi(k,p;E) + i\,F(k,g_0)\,\alpha(p;E) \tag{10}$$

Aus (10) ergibt sich

$$\varphi(k,p;E) = \frac{\varphi_0(k,p) + i\,F(k,g_0)\,\alpha(p;E)}{E + i(m_N+\omega)} \tag{11}$$

Die Division durch $E + i(m_N+\omega)$ ist hier wegen $\mathrm{Re}\,E > 0$ immer möglich. Aus (9) und (11) erhalten wir

$$\alpha(p;E)\left[E + i\,(m_v - \delta m)\right] = \alpha_0(p) + i\int d^3k\, F(k,g_0)\,\frac{\varphi_0(k,p) + i\,F(k,g_0)\,\alpha(p;E)}{E + i\,(m_N+\omega)}$$

oder

$$-i\,\alpha(p;E)\left[iE - m_v + \delta m + \int\frac{d^3k\;F^2(k,g_0)}{m_N+\omega - iE}\right] = \alpha_0(p) + \int\frac{d^3k\;F(k,g_0)\,\varphi_0(p;k)}{m_N+\omega - iE}$$

Es folgt nur der Ausdruck für

$$\alpha(p,E) = i\,\frac{\alpha_0(p) + D(iE)}{h(iE)} \tag{12}$$

Dabei ist

$$D(iE) = \int\frac{d^3k\;F(k,g_0)\;\varphi_0(k,p)}{\hat{\omega} - iE}$$

$$h(iE) = iE - (m_v - \delta m) + \int \frac{d^3k\, F^2(k,g_0)}{\hat{\omega} - iE}$$

$$\hat{\omega} = m_N + \omega$$

Wenn wir den Wert δm von B (4) ersetzen, bekommen wir

$$h(iE) = (iE - m_v)\left[1 + \int \frac{d^3k\, F^2(k,g_0)}{(\hat{\omega} - iE)(\hat{\omega} - m_v)}\right] \tag{13}$$

$$D(iE) = \int \frac{d^3k\, F(k,g_0)\, \varphi_0(k,p)}{\hat{\omega} - iE} \tag{14}$$

Wir setzen (12) in (11) ein und erhalten die Lösung für $\varphi(k,p;E)$, ausgedrückt durch die Anfangswerte $\alpha_0(p)$ und $\varphi_0(k,p)$

$$\varphi(k,p;E) = \frac{-i\left[\varphi_0(k,p) - F(k,g_0)\left\{\frac{\alpha_0(p) + D(iE)}{h(iE)}\right\}\right]}{\hat{\omega} - iE} \tag{15}$$

$$\alpha(p;E) = i\,\frac{\alpha_0(p) + D(iE)}{h(iE)} \tag{16}$$

Für diese Funktionen existieren die reziproken Laplace- Transformationen, was wir im Anhang 2 zeigen.

Die reziproke Transformation von $\alpha(p;E)$ und $\varphi(k,p;E)$ ist gegeben durch

$$\varphi(k,p;t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{iEt}\, \varphi(k,p;E)\, dE \tag{17}$$

$$\alpha(\vec{p};t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{Et}\, \alpha(\vec{p},E)\, dE \tag{18}$$

wobei $\sigma > 0$ ist und $\alpha(\vec{p},E)$ und $\varphi(\vec{k},\vec{p};E)$ für die Halbebene $\mathrm{Re}\, E > 0$ analytische Funktionen sind. Wenn wir (12) und (15) in (17) und (18) einsetzen, erhalten wir die exakten Lösungen für $\alpha(\vec{p};t)$ und $\varphi(\vec{k},\vec{p};t)$

$$\alpha(\vec{p};t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{Et} \left[\frac{\alpha_0(\vec{p}) + D(iE)}{h(iE)} \right] dE \tag{19}$$

$$\varphi(\vec{k},\vec{p};t) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{Et} \frac{\left[\varphi_0(\vec{k},\vec{p};t) - F(\vec{k},\vec{g}_0) \left\{ \frac{\alpha_0(\vec{p}) + D(iE)}{h(iE)} \right\} \right]}{\hat{\omega} - iE} \tag{20}$$

Durch geeignetes Ersetzen, $iE = z$, kann man den Integrationsweg auf einen parallel zur x-Achse zurückführen, d. h.

$$\alpha(\vec{p};t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{i\sigma-\infty}^{i\sigma+\infty} e^{-izt} \left[\frac{\alpha_0(\vec{p}) + D(z)}{h(z)} \right] dz \tag{21}$$

und $$\varphi(\vec{k},\vec{p};t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{i\sigma-\infty}^{i\sigma+\infty} e^{-izt} \frac{\left[\varphi_0(\vec{k},\vec{p}) - F(\vec{k},\vec{g}_0) \left\{ \frac{\alpha_0(\vec{p}) + D(z)}{h(z)} \right\} \right]}{\hat{\omega} - z} dz \tag{22}$$

Kapitel D

Zeitliche Entwicklung der Zustandsvektoren

Unsere Lösung C (21) und C (22) für festes t ist exakt. Wir werden uns auf den Fall $m_N + \mu > m_V$ beschränken, der energetisch keinen Zerfallsprozess erlaubt.

Die Integrale (21) und (22) direkt auszuwerten, ist unmöglich, aber wir können das Verhalten der Funktionen $\alpha(\vec{p};t)$ und $\varphi(\vec{k},\vec{p};t)$ für $t \to \infty$ genau angeben.

Wir können für $\alpha(\vec{p};t)$ (Gl. (21)) schreiben

$$\alpha(\vec{p};t) = -\frac{1}{2\pi i}\left[\alpha_0(\vec{p})\, I_1^{(\alpha)}(t) + \int_{i\sigma-\infty}^{i\sigma+\infty} \frac{D(z)\, e^{-izt}}{h(z)}\, dz\right]$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\left[\alpha_0(\vec{p})\, I_1^{(\alpha)}(t) + \int d^3k\, F(\vec{k},g_0)\, \varphi_0(\vec{k},\vec{p}) \int_{i\sigma-\infty}^{i\sigma+\infty} \frac{e^{-izt}\, dz}{(\hat{\omega}-z)\, h(z)}\right] \quad (1)$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\left[\alpha_0(\vec{p})\, I_1^{(\alpha)}(t) + \int d^3k\, F(\vec{k},g_0)\, \varphi_0(\vec{k},\vec{p})\, I_2^{(\alpha)}(\omega,t)\right]$$

wobei wir

$$I_1^{(\alpha)}(t) = \int_{i\sigma-\infty}^{i\sigma+\infty} \frac{e^{-izt}\, dz}{h(z)} \quad (2)$$

und

$$I_2^{(\alpha)}(\omega,t) = \int_{i\sigma-\infty}^{i\sigma+\infty} \frac{e^{-izt}}{(\hat{\omega}-z)\, h(z)}\, dz \quad (3)$$

gesetzt haben.

Man sieht leicht, daß die Integranden von (2) und (3) dasselbe analytische Verhalten haben wie $h(z)$ bis auf den Pol bei $z = \hat{\omega}$. Die analytischen Eigenschaften von $h(z)$ kennen wir genau (siehe Anhang 1). $h(z)$ ist überall in der z-Ebene regulär, ausgenommen auf der reellen Achse. Hier hat $h(z)$ eine Nullstelle bei $x = m_v$ und einen Verzweigungsschnitt von $x = m_N + \mu$ bis $+\infty$. Das heißt, die Integranden von (2), (3) kann man auf der ganzen Ebene analytisch fortsetzen, wobei man nicht die reelle Achse von $m_N + \mu$ bis ∞ überschreiten darf (während sie wegen der Laplace-Transformation nur für $\sigma > 0$ sicher analytisch war).

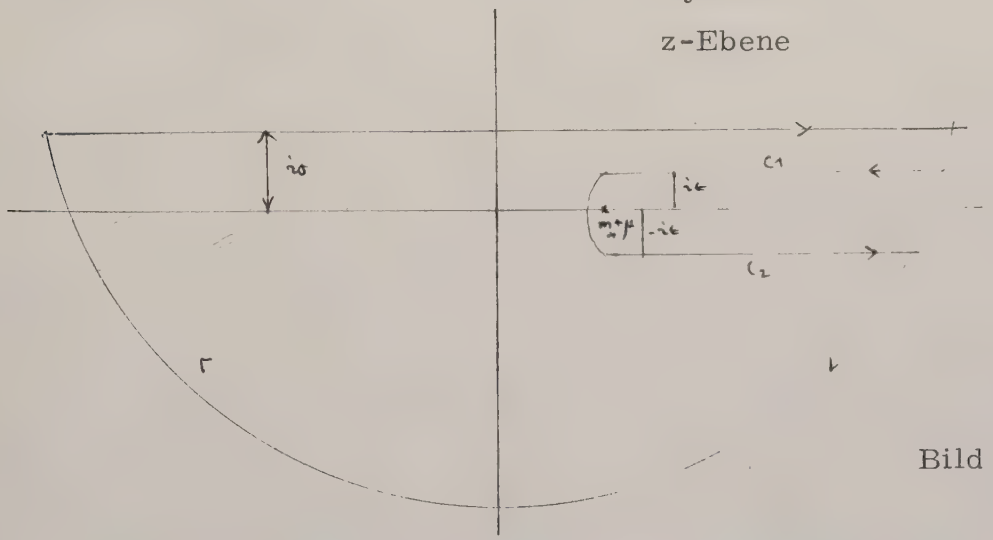


Bild 4

Wir wählen den Integrationsweg wie in der Figur 4 gezeigt wird. Nach dem Cauchy'schen Integralsatz ist

$$I_1^{(\alpha)}(t) = -\left[\int_{C_1} + \int_{C_3} + \int_{C_2} + \int_{\Gamma}\right] - 2\pi i \ \mathrm{Res} \qquad (4)$$

Nun gilt aber

$$I_{1,c}^{(\alpha)}(t) = \int_{C_1} + \int_{C_2} = \int_{i\varepsilon+\infty}^{i\varepsilon+m_N+\mu} \frac{e^{-izt}}{h(z)}\,dz + \int_{-i\varepsilon+m_N+\mu}^{-i\varepsilon+\infty} \frac{e^{-izt}}{h(z)}\,dz$$

$$= \int_{\infty}^{m_N+\mu} \frac{e^{-i(x+i\epsilon)t}}{h(x+i\epsilon)}\,dx + \int_{m_N+\mu}^{\infty} \frac{e^{-i(x-i\epsilon)t}}{h(x-i\epsilon)}\,dx$$

$$= -\int_{m_N+\mu}^{\infty} \frac{e^{-ixt}\left[e^{\epsilon t}h(x-i\epsilon) - e^{-\epsilon t}h(x+i\epsilon)\right]}{h(x+i\epsilon)\,h(x-i\epsilon)}\,dx \qquad (5)$$

Wir können jetzt zum Limes $\epsilon \longrightarrow 0$ übergehen, wenn wir t festhalten. Dann geht

$$h(x \pm i\epsilon) \longrightarrow h(x) \pm i\Gamma(x)$$

wobei (siehe Anhang 1).

$$h(x) = (x-m_v)\left[1 + P\int \frac{d^3k\, F^2(k,g_0)}{(\hat{\omega}-m_v)(\hat{\omega}-x)}\right] \qquad (6)$$

und

$$\Gamma(x) = 4\pi^2\sqrt{(x-m_N)^2-\mu^2}\; F^2(x-m_N, g_0)\;\theta(x-m_N-\mu) \qquad (7)$$

ist.

Daraus folgt für

$$I^{(\alpha)}_{1,c}(t) = 2i\int_{m_N+\mu}^{\infty} \frac{e^{-ixt}\,\Gamma(x)\,dx}{h^2(x)+\Gamma^2(x)} \qquad (8)$$

$$= 2i\int_{m_N+\mu}^{\infty} e^{-ixt}\,f_\Gamma(x)\,dx$$

wobei wir

$$f_\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x)}{h^2(x)+\Gamma^2(x)} \qquad (9)$$

eingesetzt haben.

Die Funktion $f_r(x)$ ist im Intervall $(m_\nu+\mu\ ,\ \infty)$ beschränkt. Außerdem existiert $\int_{m_\nu+\mu}^{\infty} f_r(x)\,dx$ wegen der "Cut-off"-Funktion $f(x-m_\nu)$ sicher.

Dann ist nach dem Riemann-Lebesgue'schen Lemma (siehe z. B. Whittaker-Watson [13]).

$$\lim_{t\to\infty} \int_{m_\nu+\mu}^{\infty} f(x)\, e^{-ixt}\,dx \longrightarrow 0 \tag{10}$$

Das heißt,

$$\lim_{t\to\infty} I^{(\alpha)}_{1,c}(t) \longrightarrow 0 \tag{11}$$

Wie wir wissen, hat $h(z)$ nur eine Nullstelle auf der reellen Achse, $x = m_\nu$, in unserem zu betrachtenden analytischen Bereich. Es folgt daraus

$$\operatorname{Res} \frac{e^{-izt}}{h(z)} = \frac{e^{-im_\nu t}}{1+\int \frac{d^3k\, F^2(k,g_0)}{(\hat\omega-m_\nu)^2}} = \frac{e^{-im_\nu t}}{\mathfrak{h}(m_\nu)} \tag{12}$$

Die Integration über C_3 kann man vernachlässigen. Man sieht es auch, wenn wir $m_\nu+\mu+\epsilon e^{i\varphi} = x$ setzen.

$$I_{C_3} = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{e^{-i(m_\nu+\mu)t}\, e^{-i\epsilon e^{i\varphi}}\, i\epsilon e^{i\varphi}\,d\varphi}{h(m_\nu+\mu+\epsilon e^{i\varphi})}$$

woraus

$$\epsilon\to 0 \quad |I_{C_3}| < \epsilon \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{e^{\epsilon\sin\varphi}\,d\varphi}{\sqrt{h\,h^*}} \longrightarrow 0$$

folgt.

Das Integral über Γ verschwindet wegen des Exponentialfaktors, wenn wir den Radius des Kreises unendlich groß werden lassen. Für großes z verhält sich $\hbar(z)$ wie $z - m_\nu$ und wir erhalten

$$I_\Gamma = \int_{-\pi}^{2\pi} \frac{e^{-iRe^{i\varphi}}\, iR\, e^{i\varphi}\, d\varphi}{\hbar(Re^{i\varphi})}$$

oder

$$|I_\Gamma| < \int_{-\pi}^{2\pi} \frac{e^{-R\sin\varphi}\, R\, d\varphi}{|\sqrt{\hbar(Re^{i\varphi})\,\hbar^*(Re^{i\varphi})}|}$$

$$< \int_0^{\pi/2} e^{-R\sin\varphi}\, d\varphi$$

$$< \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{R\varphi/2}{\pi}}\, d\varphi$$

$$= \frac{\pi}{2R}\left[1 - e^{-R}\right]$$

Das heißt für $R \longrightarrow \infty$

$$|I_\Gamma| \longrightarrow 0$$

Nun erhalten wir für $I_1^{(\alpha)}(t)$

$$I_1^{(\alpha)}(t) = -\left[I_{1,c}^{(\alpha)}(t) + 2\pi i \frac{e^{-im_\nu t}}{\hbar'(m_\nu)} \right] \qquad (13)$$

Ähnlich kann man auch das zweite Integral $I_2^{(\alpha)}(\omega,t)$ auswerten. Der Integrationsweg ist genau derselbe. Aber hier müssen wir aufpassen. Wenn wir $\epsilon \to 0$ gehen lassen, müssen wir über den Weg C_+ und C_- um $\hat{\omega}$ herumintegrieren, weil an der Stelle $x = m_N + \omega = \hat{\omega}$ der Nenner des Integranden verschwindet. Das

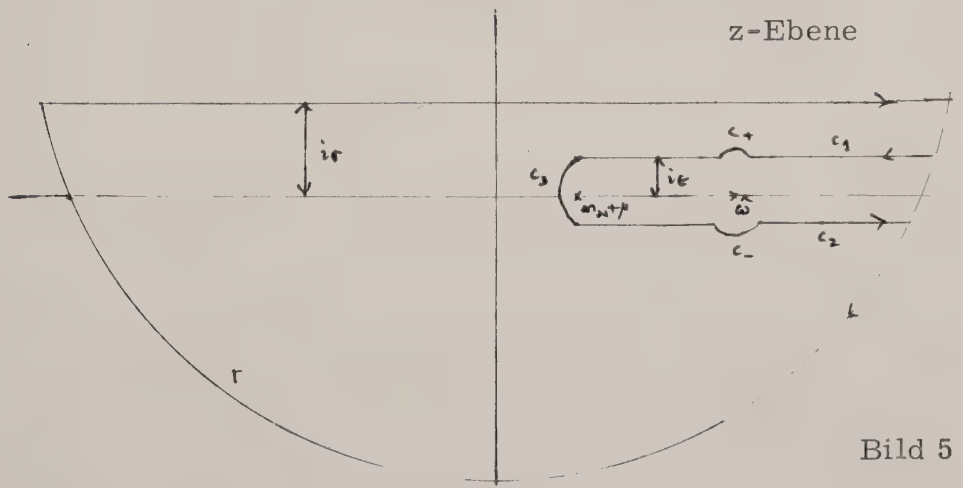


Bild 5

bedeutet

$$I_2^{(\alpha)}(\omega,t) = -\left[\int_{C_1} + \int_{C_+} + \int_{C_3} + \int_{C_2} + \int_{C_-} + \int_{\Gamma}\right] - 2\pi i\,\mathrm{Res} \tag{14}$$

Wir können das Integral über $C_1 + C_2 + C_+ + C_-$ auch etwas anders berechnen:

$$\begin{aligned} I^{(\alpha)} &= \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_+} + \int_{C_-} \\ &= \int_{i\epsilon+\infty}^{i\epsilon+m_N+\mu} \frac{e^{-izt}\,dz}{(\hat{\omega}-z)\,h(z)} + \int_{-i\epsilon+m_N+\mu}^{-i\epsilon+\infty} \frac{e^{-izt}\,dz}{(\hat{\omega}-z)\,h(z)} \\ &= \int_{+\infty}^{m_N+\mu} \frac{e^{-i(x+i\epsilon)t}\,dx}{(\hat{\omega}-x-i\epsilon)\,h(x+i\epsilon)} + \int_{m_N+\mu}^{\infty} \frac{e^{-i(x-i\epsilon)t}\,dx}{(\hat{\omega}-x+i\epsilon)\,h(x-i\epsilon)} \end{aligned} \tag{15}$$

$$= -\int_{m_{N+\mu}}^{\infty} dx \, \frac{e^{-ixt}\left[e^{\epsilon t}(\hat{\omega}-x+i\epsilon)\,h(x-i\epsilon) - e^{-\epsilon t}(\hat{\omega}-x-i\epsilon)\,h(x+i\epsilon)\right]}{\left[(\hat{\omega}-x)^2+\epsilon^2\right] h(x+i\epsilon)\, h(x-i\epsilon)}$$

$$= -\int_{m+\mu}^{\infty} dx \, \frac{e^{-ixt}\,(\hat{\omega}-x)\left[e^{\epsilon t}h(x-i\epsilon) - e^{-\epsilon t}h(x+i\epsilon)\right]}{\left[(\hat{\omega}-x)^2+\epsilon^2\right] h(x+i\epsilon)\, h(x-i\epsilon)}$$

$$-\int_{m_{N+\mu}}^{\infty} dx \, \frac{e^{-ixt}\, i\epsilon\left[e^{\epsilon t}h(x-i\epsilon) + e^{-\epsilon t}h(x+i\epsilon)\right]}{\left[(\hat{\omega}-x)^2+\epsilon^2\right] h(x+i\epsilon)\, h(x-i\epsilon)}$$

Wenn wir jetzt $\epsilon \longrightarrow 0$ gehen lassen und die Definition der δ-Funktion

$$\delta(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\pi} \, \frac{\epsilon}{x^2+\epsilon^2} \tag{16}$$

beachten, bekommen wir für $I_{2,c}^{(\alpha)}(\omega,t)$

$$I_{2,c}^{(\alpha)}(t) = 2i\,P\int_{m_{N+\mu}}^{\infty} dx \, \frac{e^{-ixt}\,\Gamma(x)}{(\hat{\omega}-x)\left[h^2(x)+\Gamma^2(x)\right]}$$

$$-2\pi i \int_{m_{N+\mu}}^{\infty} e^{-ixt}\,\delta(\hat{\omega}-x)\,\frac{h(x)}{h^2(x)+\Gamma^2(x)} \tag{17}$$

$$\doteq 2i\,P\int_{m_{N+\mu}}^{\infty} dx \, \frac{e^{-ixt}}{\hat{\omega}-x}\, f_{\Gamma}(x) - 2\pi i\, e^{-i\hat{\omega}t}\, f_{h}(x)$$

wobei wir (9) benutzt und

$$f_{h}(x) = \frac{h(x)}{h^2(x)+\Gamma^2(x)} \tag{18}$$

gesetzt haben.

Wir untersuchen jetzt das Verhalten des Hauptwertintegrals von $I^{(\alpha)}_{2,c}(\omega,t)$ und können schreiben

$$P_2^{(\alpha)}(\omega,t) = P\int_{m_N+\mu}^{\infty} \frac{dx\, e^{-ixt}\, f_r(x)}{\hat{\omega}-x} = \lim_{\epsilon\to 0}\left[\int_{m_N+\mu}^{\hat{\omega}-\delta} + \int_{\hat{\omega}-\delta}^{\hat{\omega}-\epsilon} + \int_{\hat{\omega}+\epsilon}^{\hat{\omega}+\delta} + \int_{\hat{\omega}+\delta}^{\infty}\right] \quad (19a)$$

wo δ und ϵ, $\delta > \epsilon$ zwei kleine Zahlen sind. Die beiden Integrale

$$P^{(\alpha)}_{2,a}(\omega,t) = \int_{m_N+\mu}^{\hat{\omega}+\delta} \frac{dx\, f_r(x)\, e^{-ixt}}{} + \int_{\hat{\omega}+\delta}^{\infty} dx\, \frac{f_r(x)\, e^{-ixt}}{\hat{\omega}-x}$$

für festes δ verschwinden, wenn t gegen unendlich strebt, wegen des Riemann-Lebesgue'schen Lemmas (10). Das heißt

$$t\to\infty \quad P^{(\alpha)}_{2,a}(\omega,t) = 0 \quad (19b)$$

Nun ist

$$\int_{\hat{\omega}-\delta}^{\hat{\omega}-\epsilon} \frac{f_r(x)\, e^{-ixt}}{\hat{\omega}-x}\, dx = -\int_{\delta}^{\epsilon} \frac{e^{-i(\hat{\omega}-v)t}}{v}\, f_r(\hat{\omega}-v)\, dv$$

Wenn wir δ sehr klein wählen $(\delta > \epsilon)$, dann ist $f_r(\hat{\omega}+v) \approx f_r(\omega)$. Daraus folgt

$$\int_{\hat{\omega}-\delta}^{\hat{\omega}-\epsilon} = f_r(\hat{\omega})\, e^{-i\hat{\omega}t} \int_{\epsilon}^{\delta} \frac{e^{ivt}}{v}\, dv$$

$$= f_r(\hat{\omega})\, e^{-i\hat{\omega}t} \int_{\delta t}^{\delta t} \frac{e^{i\tau}}{\tau}\, d\tau$$

Ähnlich erhält man

$$\int_{\hat{\omega}+\epsilon}^{\hat{\omega}+\delta} \frac{f_r(x)\, e^{-ixt}}{\hat{\omega}-x}\, dx = -e^{-i\hat{\omega}t} f_r(\hat{\omega}) \int_{-\epsilon t}^{-\delta t} \frac{e^{i\tau}}{\tau}\, d\tau$$

$$= -e^{-i\hat{\omega}t} f_r(\omega) \int_{\epsilon t}^{\delta t} \frac{e^{-i\tau}\, d\tau}{\tau}$$

Daraus folgt

$$p^{(\alpha)}_{2,b}(\omega,t) = \int_{\omega-\delta}^{\omega-\epsilon} + \int_{\omega+\epsilon}^{\omega+\delta}$$

$$= 2i f_r(\hat{\omega})\, e^{-i\hat{\omega}t} \int_{\epsilon t}^{\delta t} \frac{\sin\tau}{\tau}\, d\tau \qquad (20)$$

$$= 2i f_r(\hat{\omega})\, e^{-i\hat{\omega}t}\, \lambda(\epsilon,t)$$

wobei wir

$$\lambda(\epsilon,t) = \int_{\epsilon t}^{\delta t} \frac{\sin\tau}{\tau}\, d\tau \qquad (21)$$

gesetzt haben. Für $\lambda(\epsilon,t)$ gilt, wenn wir für festes δ zuerst $\epsilon \to 0$ und dann $t \to \infty$ gehen lassen

$$\lim_{t\to\infty} \lim_{\epsilon\to 0} \lambda(\epsilon,t) = \int_0^{\infty} \frac{\sin\tau}{\tau}\, d\tau = \frac{\pi}{2} \qquad (22)$$

Endlich erhalten wir

$$I^{(\alpha)}_{2,c}(\omega,t) = 2i\left[P^{(\alpha)}_{2,a}(\omega,t) + P^{(\alpha)}_{2,t}(\omega,t)\right] - 2i\, e^{-i\hat{\omega}t} f_{\#}(\hat{\omega})$$

$$= 2i\, P^{(\alpha)}_{2,a}(\omega,t) + 2i\, e^{-i\hat{\omega}t}\left[2i f_{\Gamma}(\omega)\lambda(\epsilon,t) - \pi f_{\#}(\hat{\omega})\right] \quad (23)$$

wo asymptotisches Verhalten von $P^{(\alpha)}_{2,a}(\omega,t)$ und $\lambda(\epsilon,t)$ durch (19b) und (22) gegeben ist.

Außerdem ist das Residuum von $\dfrac{e^{-izt}}{(\hat{\omega}-z)\,h(z)}$

$$\text{Res}\ \frac{e^{-izt}}{(\hat{\omega}-z)\,h(z)} = \frac{e^{-im_\nu t}}{(\hat{\omega}-m_\nu)\,\mathcal{H}(m_\nu)} \quad (24)$$

Die Integrale $\int_{\Gamma}$ und $\int_{C_3}$ verschwinden, wovon man sich leicht überzeugen kann. Wir bekommen für $I^{(\alpha)}_2(\omega,t)$ (Gl. (14))

$$I^{(\alpha)}_2(\omega,t) = -\left[2i\, P^{(\alpha)}_{2,a}(\omega,t) + 2i\, e^{-i\hat{\omega}t}\left\{f_{\Gamma}(\omega)\lambda(\epsilon,t) - \pi f_{\#}(\hat{\omega})\right\}\right]$$

$$- 2\pi i\, \frac{e^{-im_\nu t}}{(\hat{\omega}-m_\nu)\,\mathcal{H}(m_\nu)} \quad (25)$$

Aus (1), (13) und (25) folgt

$$\alpha(p,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left[-\alpha_0(p)\left\{I^{(\alpha)}_{1,c}(t) + 2\pi i\, \frac{e^{-im_\nu t}}{\mathcal{H}(m_\nu)}\right\}\right.$$

$$- \int d^3k\, F(k,g_0)\, \varphi_0(k,p)\left[\left[2i\, P^{(\alpha)}_{2,a}(\omega,t) + 2i\left\{2i f_{\Gamma}(\hat{\omega})\lambda(\epsilon,t) - \pi f_{\#}(\hat{\omega})\right\} e^{-i\hat{\omega}t}\right.\right.$$

$$\left.\left. + 2\pi i\, \frac{e^{-im_\nu t}}{(\hat{\omega}-m_\nu)\,\mathcal{H}(m_\nu)}\right]\right]$$

$$= \frac{e^{-im_\nu t}}{\mathcal{H}(m_\nu)}\left[\alpha_0(p) + \int \frac{d^3k\, F(k,g_0)\,\varphi_0(k,p)}{(\hat{\omega}-m_\nu)}\right]$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int d^3k\, F(k,g_0)\,\varphi_0(k,p)\, e^{-i\hat{\omega}t}\left\{2i f_{\Gamma}(\hat{\omega})\lambda(\epsilon,t) - \pi f_{\#}(\hat{\omega})\right\} \quad (26)$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\,\alpha_0(p)\, I^{(\alpha)}_{1,c}(t) + \frac{1}{\pi}\int d^3k\, F(k,g_0)\,\varphi_0(k,p)\, P^{(\alpha)}_{2,a}(\omega,t)$$

$$= \frac{e^{-im_\nu t}}{\mathcal{H}(m_\nu)}\,\zeta(m_\nu,p) + \frac{1}{\pi}\int d^3k\, F(k,g_0)\,\varphi_0(k,p)\, e^{-i\hat{\omega}t}\left\{2i f_{\Gamma}(\hat{\omega})\lambda(\epsilon,t) - \pi f_{\#}(\hat{\omega})\right\}$$

$$+ A^{(\alpha)}(p,t)$$

wobei wir

$$\zeta(m_v,p) = \alpha_0(p) + \int \frac{d^3k\, F(k,g_0)\,\varphi_0(k,p)}{\hat{\omega} - m_v} \tag{27}$$

und

$$A^{(\alpha)}(p,t) = \frac{1}{2\pi i}\,\alpha_0(p)\, I^{(\alpha)}_{1,c}(t) + \frac{1}{\pi}\int d^3k\, F(k,g_0)\,\varphi_0(k,p)\, P^{(\alpha)}_{3,a}(\omega,t) \tag{28}$$

gesetzt haben.

Aus (11) und (19b) folgt

$$t \to \infty \quad A^{(\alpha)}(p,t) \longrightarrow 0 \tag{29}$$

Genau dieselbe Methode kann man verfolgen, um das Integral B (22) auszurechnen. Wir gehen wieder schrittweise vor. Wir können $\varphi(k,p;t)$ in folgender Weise zerlegen:

$$\begin{aligned}\varphi(k,p;t) = {} & \frac{1}{2\pi i}\,\varphi_0(k,p)\, I^{(\varphi)}_1(t) - \frac{\alpha_0(p)}{2\pi i}\, F(k,g_0)\, I^{(\varphi)}_2(\omega,t) \\ & - \frac{1}{2\pi i}\, F(k,g_0) \int d^3k'\, F(k',g_0)\,\varphi_0(k',p)\, I^{(\varphi)}_3(\omega,\omega';t)\end{aligned} \tag{30}$$

wobei

$$I^{(\varphi)}_1(t) = \int_{i\sigma-\infty}^{i\sigma+\infty} \frac{e^{-izt}\, dz}{\hat{\omega} - z} \tag{31}$$

$$I^{(\varphi)}_2(\omega,t) = \int_{i\sigma-\infty}^{i\sigma+\infty} \frac{e^{-izt}\, dz}{h(z)\,(\hat{\omega} - z)} \tag{32}$$

und $$I_3^{(\varphi)}(\omega,\omega';t) = \int_{i\sigma-\infty}^{i\sigma+\infty} \frac{dz\ e^{-izt}}{(\hat{\omega}-z)(\hat{\omega}'-z)h(z)} \qquad (33)$$

ist.

Zuerst ist

$$I_1^{(\varphi)}(t) = 2\pi i\, e^{-i\hat{\omega}t} \qquad (34)$$

Das Integral $I_2^{(\varphi)}(\omega,t)$ ist gleich dem Integral (3) $I_2^{(\omega)}(\omega,t)$, d. h.

$$I_2^{(\varphi)}(\omega,t) = I_2^{(\omega)}(\omega,t) \qquad (35)$$

und ist durch (25) gegeben.

Das dritte Integral kann man in derselben Weise diskutieren. Man braucht nur etwas vorsichtiger die Punkte $\hat{\omega}$ und $\hat{\omega}'$ zu umgehen. Der Integrationsweg ist genau derselbe, bis auf zwei neue Halbkreise um $\hat{\omega}'$ entlang C_1+C_2.

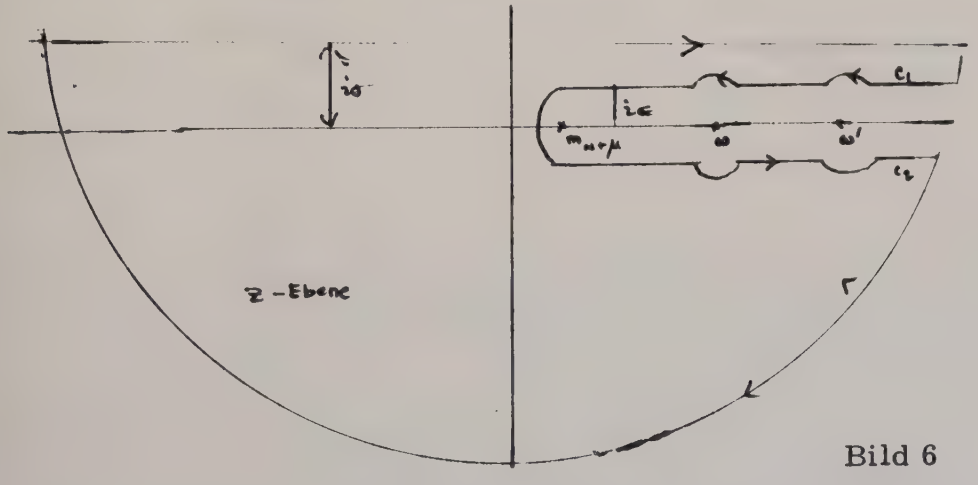


Bild 6

Wir werden aber hier die Definition (16) der δ-Funktion ausnutzen. Nach dem Cauchy'schen Satz ist

$$I_3^{(\varphi)}(\omega,\omega',t) = -\left[\int_{C_1}+\int_{C_2}+\int_{C_3}+\int_{C_r}\right] - 2\pi i\,\mathrm{Res} \qquad (36)$$

Wir schreiben

$$I_{3,c}^{(\varphi)}(\omega,\omega',t) = \int_{c_1} + \int_{c_2}$$

$$= \int_{i\epsilon+\infty}^{i\epsilon+m_N+\mu} \frac{e^{-izt}\,dz}{(\hat{\omega}-z)\,(\hat{\omega}'-z)\,h(z)} + \int_{-i\epsilon+m_N+\mu}^{-i\epsilon+\infty} \frac{e^{-izt}\,dz}{(\hat{\omega}-z)\,(\hat{\omega}'-z)\,h(z)} \qquad (37)$$

Nun ist

$$I_{3,c}^{(\varphi)}(\omega,\omega',t) = \int_{\infty}^{m_N+\mu} \frac{dx\; e^{-i(x+i\epsilon)t}}{(\hat{\omega}-x-i\epsilon)\,(\hat{\omega}'-x-i\epsilon)\cdot h(x+i\epsilon)} + \int_{m_N+\mu}^{\infty} \frac{dx\; e^{-i(x-i\epsilon)t}}{(\hat{\omega}-x+i\epsilon)\,(\hat{\omega}'-x+i\epsilon)\cdot h(x-i\epsilon)}$$

$$= -\int_{m_N+\mu}^{\infty} dx\, \frac{e^{-i(x+i\epsilon)t}\,(\hat{\omega}-x+i\epsilon)(\hat{\omega}'-x+i\epsilon)}{[(\hat{\omega}-x)^2+\epsilon^2]\,[(\hat{\omega}'-x)^2+\epsilon^2]\,h(x+i\epsilon)} + \int_{m_N+\mu}^{\infty} \frac{dx\; e^{-i(x-i\epsilon)t}\,(\hat{\omega}-x-i\epsilon)(\hat{\omega}'-x-i\epsilon)}{[(\hat{\omega}-x)^2+\epsilon^2]\,[(\hat{\omega}-x)^2+\epsilon^2]\,h(x-i\epsilon)}$$

$$= -\int_{m_N+\mu}^{\infty} \frac{e^{-ixt}\,(\hat{\omega}-x)\,(\hat{\omega}'-x)\left[e^{\epsilon t}h(x-i\epsilon) - e^{-\epsilon t}h(x+i\epsilon)\right]}{\left[(\hat{\omega}-x)^2+\epsilon^2\right]\left[(\hat{\omega}'-x)^2+\epsilon^2\right]h(x+i\epsilon)h(x-i\epsilon)}$$

$$-\int_{m_N+\mu}^{\infty} \frac{e^{-ixt}\,(\hat{\omega}-x)\,i\epsilon\left[e^{\epsilon t}h(x-i\epsilon) + e^{-\epsilon t}h(x+i\epsilon)\right]}{\left[(\hat{\omega}-x)^2+\epsilon^2\right]\left[(\hat{\omega}'-x)^2+\epsilon^2\right]h(x+i\epsilon)\,h(x-i\epsilon)}$$

$$- \int_{m_N+\mu}^{\infty} dx \; \frac{e^{-ixt}\,(\hat{\omega}'-x)\,i\epsilon\left[e^{\epsilon t} f_1(x-i\epsilon) + e^{-\epsilon t} f_1(x+i\epsilon)\right]}{\left[(\hat{\omega}-x)^2+\epsilon^2\right]\left[(\hat{\omega}'-x)^2+\epsilon^2\right] f_h(x+i\epsilon)\, f_h(x-i\epsilon)}$$

$$- \int_{m_N+\mu}^{\infty} dx \; \frac{e^{-ixt}\; i\epsilon \cdot i\epsilon\left[e^{\epsilon t} f_1(x-i\epsilon) - e^{-\epsilon t} f_1(x+i\epsilon)\right]}{\left[(\hat{\omega}-x)^2+\epsilon^2\right]\left[(\omega'-x)^2+\epsilon^2\right] f_h(x+i\epsilon)\, f_h(x-i\epsilon)}$$

Mit Hilfe der Definition der δ -Funktion (16) ergibt sich, wenn wir $\epsilon \to 0$ gehen lassen

$$I^{(\varphi)}_{3,c}(\omega,\omega';t) = 2i\, P \int_{m_N+\mu}^{\infty} \frac{dx\; e^{-ixt}\; \Gamma(x)}{(\hat{\omega}-x)\,(\hat{\omega}'-x)\left[f_h^2(x)+\Gamma^2(x)\right]}$$

$$- 2\pi i\; P \int_{m_N+\mu}^{\infty} \frac{dx\; e^{-ixt}\,\delta(\hat{\omega}'-x)}{(\hat{\omega}-x)} \; \frac{f_h(x)}{f_h^2(x)+\Gamma^2(x)}$$

$$- 2\pi i\; P \int_{m_N+\mu}^{\infty} \frac{dx\; e^{-ixt}\,\delta(\hat{\omega}-x)}{(\hat{\omega}'-x)} \; \frac{f_h(x)}{f_h^2(x)+\Gamma^2(x)}$$

$$- 2\pi^2 i \int_{m_N+\mu}^{\infty} dx\; e^{-ixt}\,\delta(\hat{\omega}-x)\,\delta(\hat{\omega}'-x)\; \frac{\Gamma(x)}{f_h^2(x)+\Gamma^2(x)}$$

$$= 2i \int_{m_N+\mu}^{\infty} dx \; \frac{e^{-ixt}\; f_\Gamma(x)}{(\hat{\omega}-x)\,(\hat{\omega}'-x)}$$

$$- 2\pi i \frac{e^{-i\hat{\omega}'t}\; f_{f_h}(\hat{\omega}')}{\hat{\omega}-\hat{\omega}'} - 2\pi i \; \frac{e^{-i\hat{\omega}t}\; f_{f_h}(\hat{\omega})}{\hat{\omega}'-\hat{\omega}}$$

$$- 2\pi^2 i\; \delta(\omega-\omega')\; e^{-i\hat{\omega}'t}\; f_1(\hat{\omega}')$$

wo $f_r(x)$ und $f_k(x)$ in (9) und (18) definierte Funktionen sind. Wir können auch schreiben

$$I_{3,c}^{(\varphi)}(\omega,\omega';t) = 2i \int_{m_N+\mu}^{\infty} \frac{dx\, e^{-ixt}\, f_r(x)}{(\hat{\omega}-x)(\hat{\omega}'-x)}$$

$$+ 2\pi i \, \frac{f_k(\hat{\omega})\, e^{-i\hat{\omega}t} - e^{-i\hat{\omega}'t} f_k(\hat{\omega}')}{\omega-\omega'} \tag{38}$$

$$- 2\pi i \; e^{-i\hat{\omega}'t}\, \delta(\omega-\omega')\, f_r(\hat{\omega}')$$

Wir untersuchen jetzt das erste Integral der rechten Seite von (38). Das Hauptwertintegral kann man folgendermaßen zerlegen:

$$P_3^{(\varphi)}(\omega,\omega';t) = \lim_{\epsilon_1,\epsilon_2\to 0}\left[\int_{m+\mu}^{\hat{\omega}-\delta_1} + \int_{\hat{\omega}-\delta_1}^{\hat{\omega}-\epsilon_1} + \int_{\hat{\omega}+\epsilon_1}^{\hat{\omega}+\delta_1} + \int_{\hat{\omega}+\delta_1}^{\hat{\omega}'-\delta_2} + \int_{\hat{\omega}'-\delta_2}^{\hat{\omega}'-\epsilon_2} + \int_{\hat{\omega}'+\epsilon_2}^{\hat{\omega}'+\delta_2} + \int_{\hat{\omega}'+\delta_2}^{\infty}\right] \tag{39}$$

wobei $\delta_1 > \epsilon_1$, $\delta_2 > \epsilon_2$ gewählt ist.

Hier haben wir $\omega < \omega'$ gewählt, was keine Einschränkung bedeutet. Wir brauchen nicht den Fall $\hat{\omega} = \hat{\omega}'$ extra zu untersuchen, weil wir alle Integrale in Zukunft im Sinne der Hauptwertintegration nehmen wollen.

Das Integral

$$P_{3,a}^{(\varphi)}(\omega,\omega';t) = \int_{m_N+\omega}^{\hat{\omega}-\delta_1} + \int_{\hat{\omega}+\delta_1}^{\hat{\omega}'-\delta_2} + \int_{\hat{\omega}'+\delta_2}^{\infty} \tag{40}$$

strebt für $t \to \infty$ gegen Null, wegen des Riemann-Lebesgue'schen Lemmas

$$\lim_{t \to \infty} \quad P^{(\varphi)}_{3,a}(\omega, \omega'; t) \longrightarrow 0 \tag{41}$$

Ähnlich wie (20) folgt

$$P^{(\varphi)}_{3,b}(\omega,\omega',t) = \int_{\hat{\omega}-\delta_1}^{\hat{\omega}-\epsilon_1} + \int_{\hat{\omega}+\epsilon}^{\hat{\omega}+\delta_1}$$

$$= 2i^{\circ} \frac{f_r(\hat{\omega})\, e^{-i\hat{\omega}t}}{\hat{\omega} \angle \hat{\omega}} \int_{\epsilon_1 t}^{\delta_1 t} \frac{\sin\tau}{\tau}\, d\tau \tag{42}$$

$$= 2i^{\circ} \frac{f_r(\hat{\omega})\, e^{-i\hat{\omega}t}}{\hat{\omega}' - \hat{\omega}} \; \lambda(\epsilon_1, t)$$

und

$$P^{(\varphi)}_{3,c}(\omega,\omega';t) = 2i^{\circ} f_r(\hat{\omega}') \frac{e^{-i\hat{\omega}'t}}{\hat{\omega} - \hat{\omega}'} \int_{\epsilon_2 t}^{\delta_2 t} \frac{\sin\tau}{\tau}\, d\tau$$

$$= 2i^{\circ} f_F(\hat{\omega}') \frac{e^{-i\hat{\omega}'t}}{\hat{\omega} - \hat{\omega}'} \lambda(\epsilon_2, t) \tag{43}$$

Wir wählen $\epsilon_1 = \epsilon_2$, $\delta_1 = \delta_2$, was man ohne weiteres tun kann. Dann ergibt sich das Hauptwertintegral

$$P^{(\varphi)}_{3}(\omega,\omega';t) = P^{(\varphi)}_{3,a}(\omega,\omega',t) + P^{(\varphi)}_{3b}(\omega,\omega',t) + P^{(\varphi)}_{3c}(\omega,\omega',t)$$

$$= P^{(\varphi)}_{3a}(\omega,\omega',t) + 2i^{\circ} \left[\frac{f_r(\hat{\omega}) e^{-i\hat{\omega}t} - f_r(\hat{\omega})\, e^{-i\hat{\omega}'t}}{\hat{\omega} - \hat{\omega}'} \right] \tag{44}$$

das Residuum von $\dfrac{e^{-izt}}{(\hat{\omega}-z)(\hat{\omega}'-z)\,h(z)}$

$$\operatorname{Res}\frac{e^{-izt}}{(\hat{\omega}-z)(\hat{\omega}'-z)\,h(z)} = \frac{e^{-im_\nu t}}{(\hat{\omega}-m_\nu)(\hat{\omega}'-m_\nu)\,\mathcal{H}(m_\nu)} \tag{45}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} I_3^{(\varphi)}(\omega,\omega',t) &= -\bar{I}_{3,c}^{(\varphi)}(\omega,\omega';t) - 2\pi i \operatorname{Res} \\ &= 2i\left[P_{3,a}^{(\varphi)}(\omega,\omega',t) - 2i\left\{\frac{f_r(\hat{\omega})\,e^{-i\hat{\omega}t} - f_r(\hat{\omega}')\,e^{-i\hat{\omega}'t}}{\omega-\omega'}\right\}\lambda(\epsilon,t)\right] \\ &\quad - 2\pi i\,\frac{f_k(\hat{\omega})\,e^{-i\hat{\omega}t} - f_k(\hat{\omega}')\,e^{-i\hat{\omega}'t}}{\omega-\omega'} \\ &\quad + 2\pi^2 i\, e^{-i\hat{\omega}t}\,\delta(\omega-\omega')\,f_r(\hat{\omega}') - 2\pi i\,\frac{e^{-im_\nu t}}{(\hat{\omega}-m_\nu)(\hat{\omega}'-m_\nu)\,\mathcal{H}(m_\nu)} \end{aligned} \tag{46}$$

Aus (30), (34), (35), (25) und (46) folgt

$$\begin{aligned} \Phi(k,p;t) &= \Phi_0(k,p)\,e^{-i\hat{\omega}t} + \frac{\alpha_0(p)}{2\pi i}F(k,g_0)\left[2i\,P_{2,a}^{(\alpha)}(\omega,t) + \right. \\ &\quad \left. + 2i\,e^{-i\hat{\omega}t}\left\{\frac{2i\,f_r(\hat{\omega})\,\lambda(\epsilon,t) - \pi f_k(\hat{\omega})}{\omega-\omega'}\right\} + 2\pi i\,\frac{e^{-im_\nu t}}{(\hat{\omega}-m_\nu)\,\mathcal{H}(m_\nu)}\right] \\ &\quad + \frac{1}{2\pi}F(k,g_0)\int d^3k'\,F(k',g_0)\,\Phi_0(k',p)\left[P_{3,a}^{(\varphi)}(\omega,\omega';t) + \right. \\ &\quad - 2i\left\{\frac{f_r(\hat{\omega})\,e^{-i\hat{\omega}t} - f_r(\hat{\omega}')\,e^{-i\hat{\omega}'t}}{\omega-\omega'}\right\}\lambda(\epsilon,t) \\ &\quad + \pi\,\frac{f_k(\hat{\omega})\,e^{-i\hat{\omega}t} - f_k(\hat{\omega}')\,e^{-i\hat{\omega}'t}}{\omega-\omega'} - \pi^2 e^{-i\hat{\omega}'t}\,\delta(\omega-\omega')\,f_r(\hat{\omega}') \\ &\quad + \pi\,\frac{e^{-im_\nu t}}{(\hat{\omega}-m_\nu)(\hat{\omega}'-m_\nu)\,\mathcal{H}(m_\nu)} \end{aligned}$$

$$= \varphi_0(k,\beta)\, e^{-i\hat{\omega}t}$$

$$+ \frac{\alpha_0(\beta)}{\pi} F(k,\vartheta_0)\, e^{-i\hat{\omega}t} \left\{ 2i\, f_r(\hat{\omega})\, \lambda(\epsilon,t) - \pi f_k(\hat{\omega}) \right\}$$

$$- \frac{2i\lambda(\epsilon,t)\, F(k,\vartheta)}{\pi} \int d^3k'\, F(k',\vartheta_0)\, \varphi_0(k',\beta) \left\{ \frac{f_r(\hat{\omega})\, e^{-i\hat{\omega}t} - f_r(\hat{\omega}')\, e^{-i\hat{\omega}'t}}{\omega - \omega'} \right\}$$

$$+ F(k,\vartheta_0) \int d^3k'\, F(k',\vartheta_0)\, \varphi_0(k',\beta) \left\{ \frac{f_k(\hat{\omega})\, e^{-i\hat{\omega}t} - f_k(\hat{\omega}')\, e^{-i\hat{\omega}'t}}{\omega - \omega'} \right\} \qquad (47)$$

$$+ \frac{F(k,\vartheta_0)\, e^{-im_\nu t}}{(\hat{\omega} - m_\nu)\, \mathfrak{H}(m_\nu)}\, \zeta(m_\nu,\beta) - \pi F(k,\vartheta_0)\, 4\pi\, |k|\, \omega\, F(k,\vartheta_0)\, \varphi_0(k,\beta)\, f_r(\hat{\omega})\, e^{-i\hat{\omega}t}$$

$$+ B^{(\varphi)}(\beta,t)$$

wobei wir

$$B^{(\varphi)}(\beta,t) = \frac{\alpha_0(\beta)}{2\pi} F(k,\vartheta_0)\, P^{(\omega)}_{2,a}(\omega,t) + \frac{1}{\pi} F(k,\vartheta_0) \int d^3k'\, F(k',\vartheta_0)\, \varphi_0(k',\beta) \cdot P^{(\varphi)}_{3,a}(\omega,\omega';t)$$

und

$$\zeta(m_\nu,\beta) = \alpha_0(\beta) + \int \frac{d^3k\, F(k,\vartheta_0)\, \varphi_0(k,\beta)}{\omega - m_\nu}$$

gesetzt haben.

Selbstverständlich geht $B^{(\varphi)}(\beta;t) \longrightarrow 0$, wenn $t \longrightarrow \infty$ strebt, wegen (41) und (19). Das heißt

$$t \longrightarrow \infty \qquad B^{(\varphi)}(t) \longrightarrow 0 \qquad (48)$$

Die Gleichungen (26) und (47) geben uns die Lösung des Anfangswertproblems für sehr großes t. Sie sind Linearkombinationen von Gliedern, die sich für große t wie ebene Wellen verhalten. Das

zweite und dritte Integral von (47) kann man in je zwei Terme spalten, wovon jeweils der erste nur $e^{i\hat{\omega}t}$ als Zeitfaktor enthält und jeweils der andere für $t \to \infty$ gegen Null strebt. Dieses Verhalten wird in Zusammenhang mit dem Existenzbeweis im nächsten Kapitel gezeigt.

Kapitel E

Existenz des Møller-Operators im Teilraum $\mathcal{H}_{v;N\theta}$

Betrachten wir die Schrödinger-Gleichung D (1)

$$H|z,t\rangle = i\frac{\partial}{\partial t}|z,t\rangle \tag{1}$$

Die Lösung der Gleichung ist

$$|z,t\rangle = e^{-iHt}|z,0\rangle \tag{2}$$

wo $|z,0\rangle$ der Zustandsvektor zur Zeit Null ist. Wir wenden darauf den Operator e^{iH_0t} an und untersuchen das asymptotische Verhalten, wenn $t\to\infty$ geht. Wenn für jedes $|z,0\rangle$ aus dem Teilraum $\mathcal{H}_{v;N\theta}$ der Limes von $e^{iH_0t}e^{-iHt}|z,0\rangle$ für $t\to\infty$ im Sinne der schwachen Konvergenz existiert, ist das gleichbedeutend mit der Existenz des Møller-Operators in dem betrachteten Teilraum.

Wir setzen hier voraus, daß die Entwicklungskoeffizienten des Vektors $|z,0\rangle$ vernünftige Funktionen sind, d.h. etwa Funktionen, die Wellenpakete beschreiben. Anders ausgedrückt sind die Anfangswerte $\alpha_0(\mathfrak{p})$ und $\varphi_0(k,\mathfrak{p})$ stetige und beschränkte Funktionen für alle k und $\mathfrak{p}$.

Aus (2) und C (2) folgt

$$|\tilde{z},t) = e^{iH_0t}e^{-iHt}|z,0\rangle = e^{iH_0t}|z,t\rangle$$

$$= \int d^3\mathfrak{p}\,\alpha(\mathfrak{p};t)\,e^{i\omega_{\mathfrak{p}}t}|\mathfrak{p};0;0\rangle + \int d^3\mathfrak{p}\,d^3k\,\varphi(k,\mathfrak{p};t)\,e^{i\hat{\omega}t}|0;\mathfrak{p}_k;k\rangle \tag{3}$$

wo $\alpha(\mathfrak{p},t)$ und $\varphi(\mathfrak{k},\mathfrak{p},t)$ durch (26) und (47) ausgedrückt sind. Der erste Summand der rechten Seite von (3) ist, wenn wir den Wert von $\alpha(\mathfrak{p},t)$ explizit anschreiben,

$$|\tilde{z},t\rangle_1 = \int d^3\mathfrak{p}\, \frac{\zeta(m_\nu;\mathfrak{p})}{\mathcal{H}(m_\nu)}\, |\mathfrak{p};0;0\rangle + \frac{e^{im_\nu t}}{\pi} \int d^3\mathfrak{p}\, d^3\mathfrak{k}\, F(\mathfrak{k},\mathfrak{p}_0)\, \varphi_0(\mathfrak{k},\mathfrak{p})\, e^{-i\hat{\omega}t}_{\times}$$

$$\times \left\{ 2i\, \xi_r(\hat{\omega})\, \lambda(\epsilon,t) - \xi_{\mathfrak{k}}(\hat{\omega}) \right\} |\mathfrak{p};0;0\rangle \qquad (4)$$

$$+ e^{im_\nu t} \int d^3\mathfrak{p}\; A^{(\alpha)}(\mathfrak{p};t)\; |\mathfrak{p};0;0\rangle$$

Den beschränkten Integranden des zweiten Terms von (4) kann man wegen der "Cut-off" -Funktion als integrierbar annehmen. Wir können sofort das Riemann-Lebesgue'sche Lemma anwenden und sagen, daß für $t \to \infty$ der zweite Term verschwindet. Daraus folgt

$$|\tilde{z},t\rangle_1 = \int d^3\mathfrak{p} \left[\frac{\zeta(m_\nu;\mathfrak{p})}{\mathcal{H}(m_\nu)} + \tilde{A}^{(\alpha)}(\mathfrak{p},t) \right] |\mathfrak{p};0;0 \qquad (5)$$

wobei für $t \to \infty$

$$\tilde{A}^{(\alpha)}(\mathfrak{p},t) \longrightarrow 0 \qquad (6)$$

geht.

Der zweite Summand der rechten Seite von (3) ist ähnlich

$$|\tilde{z},t\rangle_2 = \int d^3\mathfrak{p}\, d^3\mathfrak{k}\, \varphi_0(\mathfrak{k},\mathfrak{p})\, |0;\mathfrak{p}-\mathfrak{k};0\rangle$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int d^3\mathfrak{p}\, d^3\mathfrak{k}\, \alpha_0(\mathfrak{p})\, F(\mathfrak{k},\mathfrak{p}_0) \left\{ 2i\, \xi_r(\hat{\omega})\, \lambda(\epsilon,t) - \pi \xi_{\mathfrak{k}}(\hat{\omega}) \right\} |0;\mathfrak{p}-\mathfrak{k};\mathfrak{k}\rangle$$

$$- \frac{2i\lambda(\epsilon,t)}{\pi} \int d^3\mathfrak{p}\, d^3\mathfrak{k}\, F(\mathfrak{k},\mathfrak{p}_0) \int d^3\mathfrak{k}'\, F(\mathfrak{k}',\mathfrak{p}_0)\, \varphi_0(\mathfrak{k}',\mathfrak{p}) \frac{\xi_r(\hat{\omega}) - \xi_r(\hat{\omega}')\, e^{i(\omega-\omega')t}}{\omega-\omega'} |0;\mathfrak{p}-\mathfrak{k},\mathfrak{k}\rangle$$

$$+ \int d^3\beta\, d^3k\; F(k,\beta_0) \int d^3k'\; F(k',\beta)\, \frac{f_k(\hat\omega) - f_k(\hat\omega')\, e^{i(\omega-\omega')t}}{} \varphi_0(k',\beta)\, |0;\beta-k;k\rangle$$

$$+ \int d^3\beta\, d^3k\; \frac{F(k,\beta_0)\; e^{i(\hat\omega - m_\nu)t}\; \zeta(m_\nu,k)}{(\hat\omega - m_\nu)\; \mathcal{H}(m_\nu)} \quad |0;\beta-k;k\rangle$$

$$- \int d^3\beta\, d^3k \quad 4\pi |k|\omega\; F^2(k,\beta_0)\; \varphi_0(k,\beta)\; f_r(\hat\omega)\; |0;\beta-k;k\rangle$$

$$+ \int d^3\beta\, d^3k \quad B^{(\rho)}(\beta,t)\; |0;\beta-k;k\rangle$$

$$= \int d^3\beta\, d^3k\; \varphi_0(k,\beta)\; |0;\beta-k;k\rangle$$

$$+ \frac{2i\,\lambda(\epsilon,t)}{\pi} \int d^3\beta\, d^3k\; F(k,\beta_0)\; f_r(\hat\omega)\; \zeta(\omega,\beta)\; |0;\beta-k,k\rangle$$

$$- \int d^3\beta\, d^3k\; F(k,\beta_0)\; f_k(\hat\omega)\; \zeta(\omega,\beta)\; |0;\beta-k;k\rangle \qquad (7)$$

$$+ \frac{2i\,\lambda(\epsilon,t)}{\pi} \int d^3\beta\, d^3k\; F(k,\beta_0) \int d^3k'\; F(k,\beta_0)\, \varphi_0(k',\beta)\, f_r(\hat\omega')\, \frac{e^{i(\omega-\omega')t}}{\omega-\omega'}\, |0;\beta-k;k\rangle$$

$$- \int d^3\beta\, d^3k\; F(k,\beta_0) \int d^3k'\, F(k',\beta_0)\; \varphi_0(k',\beta)\; f_k(\hat\omega')\, \frac{e^{i(\omega-\omega')t}}{\omega-\omega'}\; |0;\beta-k;k\rangle$$

$$+ \int d^3\beta\, d^3k\; F(k,\beta_0)\; e^{i(\hat\omega - m_\nu)t}\, \zeta(m_\nu,\beta)\; |0;\beta-k;k\rangle$$

$$- \int d^3\beta\, d^3k\; 4\pi^2 |k|\,\omega\; F^2(k,\beta_0)\; \varphi_0(k,\beta)\; f_r(\hat\omega)\; |0;\beta-k,k\rangle$$

$$+ \int d^3\beta\, d^3k \quad B^{(\rho)}(\beta,t)$$

wobei

$$\zeta(\omega) = \alpha_0(p) + p\int \frac{d^3k' F(k',g_0)\ \varphi_0(k',p)}{\omega'-\omega} \tag{7a}$$

ist.

Wir untersuchen die Integrale

$$f_i(\omega,t) = \int d^3k' F(k',g_0)\ \varphi_0(k',p)\ f_i(\hat{\omega}')\, e^{i(\omega-\omega')t} \tag{8}$$

Wir klären, wie sich $f_i(\omega,t)$ für große Zeiten verhält. Wir können schreiben

$$f_i(\omega,t) = 4\pi \int_\mu^\infty |k'|\,\omega' d\omega'\ F(k',g_0)\ \varphi_0(k',p)\ f_i(\hat{\omega}')\, e^{i(\omega-\omega')t}$$

$$= \int_\mu^\infty \frac{d\omega'\,\sigma(\omega')\ f_i(\hat{\omega}')\ e^{i(\omega-\omega')t}}{\omega-\omega'} \tag{9}$$

Hier haben wir

$$\sigma(\omega',p) = 4\pi |k'|\,\omega'\ F(k',g_0)\ \varphi_0(k',p) \tag{10}$$

eingesetzt. Das Integral (9) kann man genau wie (19a) aufspalten

$$f_i(\omega,t) = \int_\mu^{\omega-\delta} + \int_{\omega-\delta}^{\omega-\epsilon} + \int_{\omega+\epsilon}^{\omega+\delta} + \int_{\omega+\delta}^{\infty}$$

$$= \left[\int_\mu^{\omega-\delta} + \int_{\omega+\delta}^{\infty}\right] + \left[\int_{a-\delta}^{\omega-\epsilon} + \int_{\omega+\epsilon}^{\omega+\delta}\right] \tag{11}$$

$$= f_{ia}(\omega,t) + f_{ib}(\omega,t)$$

Wegen des Riemann-Lebesgue'schen Lemmas gilt

$$t \to \infty \quad f_{ia}(\omega,t) \longrightarrow 0 \tag{12}$$

Genau wie D (20) kann man zeigen

$$f_{ib}(\omega,t) = \sigma(\omega,p)\, f_i(\omega) \left[-\int_{+\delta}^{+\epsilon} \frac{e^{i\upsilon t}}{\upsilon}\, d\upsilon \; - \int_{-\epsilon}^{-\delta} \frac{e^{i\upsilon t}}{\upsilon}\, d\upsilon \right]$$

$$= 2i\, \sigma(\omega,p)\, f_i(\omega) \int_{\epsilon t}^{\delta t} \frac{\sin\tau}{\tau}\, d\tau \tag{13}$$

$$= 2i\, \sigma(\omega,p)\, f_i(\hat{\omega})\, \lambda(\epsilon,t)$$

Darauf läßt sich $|z,t\rangle_2$ folgendermaßen schreiben

$$|\tilde{z},t\rangle_2$$

$$= \int d^3p\, d^3k \Big[\varphi_0(k,p) - F(k,\vartheta_0)\, \zeta(\omega,p) \Big\{ f_g(\hat{\omega}) - \frac{2i\,\lambda(\epsilon,t)}{\pi}\, f_r(\hat{\omega}) \Big\}$$

$$- 2i\, \lambda(\epsilon,t)\, F(k,\vartheta_0)\, \sigma(\omega,p) \Big\{ f_g(\omega) - \frac{2i\,\lambda(\epsilon,t)}{\pi}\, f_r(\hat{\omega}) \Big\}$$

$$- \pi\, F(k,\vartheta_0)\, \sigma(\omega,p)\, f_r(\omega) \Big] \, |0;\, p-k;\, k\rangle$$

$$+ \int d^3p\, d^3k\, \frac{F(k,\vartheta_0)\, \zeta(\omega_v,p)}{\hat{\omega} - \omega_v\, \mathfrak{H}(\omega_v)}\, e^{i(\hat{\omega}-\omega_v)t}\, |0;\, p-k;\, k\rangle$$

$$+ \int d^3p\, d^3k \Big[B^{(p)}(p;t) + F(k,\vartheta_0) \Big\{ \frac{2i\,\lambda(\epsilon,t)}{\pi}\, f_{ra}(\omega,t) - f_{ga}(\omega,t) \Big\}$$

$$\times |0;\, p-k;\, k\rangle$$

$$= \int d^3p\, d^3k\, \Omega(\omega,p,t)\, |0;p-k;k\rangle$$

$$+ \int d^3p\, d^3k\, \Lambda(\omega,p)\, e^{i(\hat{\omega}-m_v)t}\, |0;p-k;k\rangle \qquad (14)$$

$$+ \int d^3p\, d^3k \sum'(p,t)\, |0;p-k;k\rangle$$

wo wir

$$\Omega(\omega,p;t) = \varphi_0(p,k) - F(k,g_0)\left\{f_s(\hat{\omega}) - 2i\lambda(\epsilon,t) f_r(\hat{\omega})\right\} \times \left\{\zeta(\omega,p) + 2i\lambda(\epsilon,t)\sigma(\omega,p)\right\}$$
$$- \pi F(k,g_0)\,\sigma(\omega,p)\, f_r(\hat{\omega}) \qquad (15)$$

$$\Lambda(\omega,p) = \frac{F(k,g_0)\,\zeta(m_v,p)}{(\hat{\omega}-m_v)\,\mathfrak{R}(m_v)} \qquad (16)$$

und

$$\sum(p,t) = F(k,g_0)\left\{2i\lambda(\epsilon,t) f_{r,a}(\omega,t) - f_{s,a}(\omega,t)\right\} + B^{(p)}(p,t) \qquad (17)$$

eingeführt haben.

Für $t \to \infty$ strebt $\Omega(\omega,p;t)$ nach

$$\tilde{\Omega}(\omega,p) = \varphi_0(p,k) - F(k,g_0)\left\{f_s(\hat{\omega}) - i f_r(\hat{\omega})\right\}\left\{\zeta(\omega,p) + \pi i\sigma(\omega,p)\right\}$$
$$- \pi F(k,g_0)\,\sigma(\omega,p)\, f_r(\hat{\omega}) \qquad (18)$$

wegen D (22) , dagegen strebt $\sum(\mathfrak{p},t)$ nach Null, was wegen der Beziehungen D (48) und (12) selbstverständlich ist. Über das asymptotische Verhalten des zweiten Summanden kann man in dieser Form keine Aussage machen.

Aus (14) und (5)erhalten wir

$$|\tilde{z},t\rangle = \int d^3\mathfrak{p}\left[\frac{\zeta(m_\nu,\mathfrak{p})}{\mathfrak{H}(m_\nu)} + \tilde{A}^{(\alpha)}(\mathfrak{p},t)\right]|\mathfrak{p};0;0\rangle$$

$$+ \int d^3\mathfrak{p}\, d^3\mathfrak{k}\left[\Omega(\omega,\mathfrak{p};t) + \sum(\mathfrak{p},t)\right]|0;\mathfrak{p}-\mathfrak{k};\mathfrak{k}\rangle \qquad (19)$$

$$+ \int d^3\mathfrak{k}\, d^3\mathfrak{p}\;\Delta(\omega,\mathfrak{p})\; e^{i(\hat{\omega}-m_\nu)t}\,|0;\mathfrak{p}-\mathfrak{k};\mathfrak{k}\rangle$$

Dieser Zustandsvektor konvergiert schwach gegen einen Vektor $|\eta\rangle$, der die Form

$$|\eta\rangle = \int d^3\mathfrak{p}\,\frac{\zeta(m_\nu,\mathfrak{p})}{\mathfrak{H}(m_\nu)}\,|\mathfrak{p};0;0\rangle + \int d^3\mathfrak{p}\, d^3\mathfrak{k}\;\tilde{\Omega}(\omega,\mathfrak{p})\,|0;\mathfrak{p}-\mathfrak{k},\mathfrak{k}\rangle \qquad (20)$$

hat.

Das wollen wir jetzt beweisen. Nun ist das innere Produkt von $|\tilde{z},t\rangle$ und einem beliebigen Vektor aus $\mathfrak{H}_{\nu;N\theta}$

$$|\xi\rangle = \int d^3\mathfrak{p}\;\beta(\mathfrak{p})\,|\mathfrak{p};0;0\rangle + \int d^3\mathfrak{p}\, d^3\mathfrak{k}\;\gamma(\mathfrak{p};\mathfrak{k})\,|0;\mathfrak{p}-\mathfrak{k};\mathfrak{k}\rangle \qquad (21)$$

gleich

$$\langle\xi|\tilde{z},t\rangle = \int d^3\mathfrak{p}\;\beta^*(\mathfrak{p})\left[\frac{\zeta(m_\nu,\mathfrak{p})}{\mathfrak{H}(m_\nu)} + \tilde{A}^{(\alpha)}(\mathfrak{p},t)\right]$$

$$+ \int d^3\mathfrak{p}\, d^3\mathfrak{k}\;\gamma^*(\mathfrak{p},\mathfrak{k})\left[\Omega(\omega,\mathfrak{p},t) + \sum(\mathfrak{p},t)\right] \qquad (22)$$

$$+ \int d^3\mathfrak{p}\, d^3\mathfrak{k}\;\gamma^*(\mathfrak{p},\mathfrak{k})\;\Delta(\omega,\mathfrak{p})\; e^{i(\hat{\omega}-m_\nu)t}$$

Wenn $\gamma(\xi,k)$ eine vernünftige Funktion ist, verschwindet das dritte Integral wegen des Riemann-Lebesgue'schen Lemmas. Daraus folgt für $t \to \infty$

$$t \to \infty \quad \langle \xi | \hat{z}, t \rangle = \langle \xi | \eta \rangle \tag{23}$$

Damit ist unsere Behauptung bewiesen. Das heißt die Møller-Matrix existiert tatsächlich in diesem Falle im Sinne der schwachen Konvergenz.

Bemerkungen

Der Beweis, den wir oben durchgeführt haben, hängt von folgenden Faktoren ab:

a) Massenrenormierung: Wir haben die Massenrenormierung so geschickt durchgeführt, daß die Spektren von H und H_0 übereinstimmen.

b) Vernünftige Anfangswerte $\varphi_0(k,\beta)$, $\alpha_0(\beta)$: Das bedeutet, daß $\varphi_{\beta 10}$ nur normierbare Vektoren enthält. So etwas kann man durch Einführung der Wellenpakete erfüllen.

c) Abschneidefaktor $f(k)$: Dieser Faktor gewährleistet die Konvergenz aller Integrale, die in Frage kommen.

Daß der Beweis ohne a) nicht geht, kann man leicht sehen: der Vektor $|\tilde{z},t\rangle$ (Gl. E (19)) würde folgende Form bekommen

$$|\tilde{z},t\rangle = \int d^3\beta \left[e^{i m_\nu t - i E_\nu t} \frac{\gamma(E_\nu,\beta)}{\mathcal{R}(E_\nu)} + \tilde{A}^{(\alpha)}(\beta,t) \right] |\beta;0;0\rangle$$

$$+ \int d^3\beta\, d^3k \left[\Omega(\omega,\beta;t) + \sum(\beta,t) \right] |0;\beta-k;k\rangle$$

$$+ \int d^3\beta\, d^3k\, \Delta'(\omega,\beta)\, e^{i(\omega-E_\nu)t}\, |0;\beta-k;k\rangle$$

wobei E_ν die Nullstelle von

$$\underline{h}(z) = E - m_\nu + \int \frac{d^3k\, F^2(k,\vartheta_0)}{\omega - z}$$

ist.

Dieser Zustandsvektor kann nicht schwach konvergieren.

Die Beschränkung $\lambda\rangle$ ist auch selbstverständlich. Es ist aber schwer zu sagen, ob die dritte Annahme notwendig ist. Es kann sein,

daß ohne $f(k)$ der Beweis ausführbar ist.

Man kann den Beweis auch etwas anders durchführen. Wir schreiben

$$|\tilde{z},t\rangle = e^{iH_0 t}\, e^{-iHt}\, |z,0\rangle$$

Den zeitunabhängigen Zustandsvektor können wir nach den vollständigen, orthonormierten physikalischen Zuständen $|V\rangle$ und $|N\theta\rangle$ entwickeln:

$$|\tilde{z},t\rangle = \int d^3p_0\, e^{iH_0 t}\, e^{-iHt}\, |V\rangle\langle V|z,0\rangle + \int d^3p_0\, d^3k_0\, e^{iHt}\, e^{-iHt}\, |N\theta\rangle\langle N\theta|z,0\rangle$$

wobei $|V\rangle$, $|N\theta\rangle$ durch die Gleichungen (30b) und (41') gegeben sind. Wenn man die expliziten Formen $|V\rangle$, $|N\theta\rangle$ und $\langle V|z,0\rangle$, $\langle N\theta|z,0\rangle$ einschreibt und die Integration über k_0 durchführt und schließlich $t \to \infty$ gehen läßt, erhält man in gleicher Weise genau den Ausdruck E (19). Daraus folgt der Existenzbeweis automatisch, was wir am Ende des Kapitels E gezeigt haben.

Es wäre auch interessant, den Fall $\varphi_{\delta 1,-1}$ zu diskutieren. Hier sind Prozesse wie $V+\theta \rightleftarrows N+N+\theta$ möglich. Das entspricht dem Fall der Mehrkanalstreutheorie, wofür man die Existenz des Møllerоperators bis jetzt nicht zeigen konnte. In diesem Teilraum hätte man es mit Integralgleichungen zu tun, die unbeschränkte Kerne enthalten, was die Diskussion sehr kompliziert macht.

Herrn Professor Ludwig möchte ich für die Ermöglichung und das ständige Interesse an dieser Arbeit herzlich danken. Herrn Dr. Rollnik, Dr. Grawert, Dr. Petzold und Herrn Großmann danke ich für viele wertvolle Diskussionen.

Anhang 1

Eigenschaften der komplexen Funktion $\underline{h}(E)$

Für $E < m_N + \mu$ haben wir die Funktion $\underline{h}(E)$ definiert (siehe A (25)) durch die Beziehung

$$\underline{h}(E) = E - m_v + \int \frac{d^3k\, F^2(k, g_0)}{\hat{\omega} - E} \tag{1}$$

wobei $m_N + \omega = \hat{\omega}$ ist. Die analytische Fortsetzung der Funktion $\underline{h}(E)$ bezeichnen wir mit $\underline{h}(z)$,

$$\underline{h}(z) = z - m_v + \int \frac{d^3k\, F^2(k, g_0)}{(\hat{\omega} - z)} \tag{2}$$

Daß die Funktion $\underline{h}(z)$ nirgendwo für $\mathrm{Im}\, z \neq 0$ verschwinden kann, ist leicht zu zeigen. Wenn wir $z = x + iy$ schreiben, erhalten wir für

$$\underline{h}(z) = x + iy - m_v + \int \frac{d^3k\, F^2(k, g_0)\, [(\hat{\omega} - x) + iy]}{[(\hat{\omega} - x)^2 + y^2]}$$

$$= x - m_v + \int \frac{d^3k\, F^2(k, g_0)\, (\hat{\omega} - x)}{(\hat{\omega} - x)^2 + y^2} + iy \left[1 + \int \frac{d^3k\, F^2(k, g_0)}{(\hat{\omega} - x)^2 + y^2} \right]$$

Das heißt, für $y \neq 0$ ist $\underline{h}(z) \neq 0$

Für $z = x \pm i\epsilon$, ϵ beliebig klein, und $x > m_N + \mu$ können wir

$$\frac{1}{\hat{\omega} - x \mp i\epsilon} = P \frac{1}{\hat{\omega} - x} \pm \pi i\, \delta(\hat{\omega} - x) \tag{3}$$

einsetzen und aus (2) bekommen wir

$$\lim_{\epsilon\to 0} \underline{h}(x \pm i\epsilon) = x - m_N + P\int \frac{d^3k\, F^2(k,g_0)}{\hat{\omega} - x} \pm \pi i \int d^3k\, F^2(k,g_0)\, \delta(\hat{\omega} - x)$$

$$= \underline{h}(x) \pm \pi i \int_{\mu}^{\infty} g\varkappa(k)\, \omega\, d\omega\, F^2(k,g_0)\, \delta(\hat{\omega} - x) \qquad (4)$$

$$= \underline{h}(x) \pm \pi i\, g\pi |k_0|\, \omega_0\, F^2(k_0,g_0)\, \theta(x - m_N - \mu)$$

wo wir

$$\underline{h}(x) = x - m_N + P\int \frac{d^3k\, F^2(k,g_0)}{\hat{\omega} - x}$$

$$x = m_N + \sqrt{k_0^2 + \mu^2} \quad \text{und} \quad \theta(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \qquad (5)$$

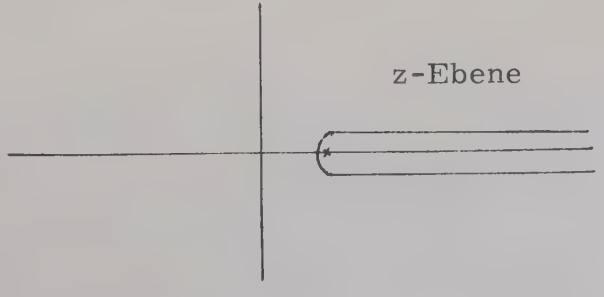
gesetzt haben. Schreiben wir

$$\Gamma(x) = 4\pi^2 |k_0|\, \omega_0\, F^2(k_0,g_0)\, \theta(x - m_N - \mu) \qquad (6)$$

dann ist

$$\lim_{\epsilon\to 0} \underline{h}(x \pm i\epsilon) = \underline{h}(x) \pm i\Gamma(x) \qquad (7)$$

Wir sehen sofort, daß die Funktion in dem Intervall oben und unten verschiedene Werte hat. Wenn wir die reelle Achse durch einen Schnitt aufschneiden, wird die Funktion auf der ganzen Ebene analytisch, bis auf einzelne Nullstellen auf der reellen Achse.



Nach der Einführung der Massenrenormierung geht $\underline{h}(z)$ in die Funktion

$$h(z) = (z - m_v)\left[1 + \int \frac{d^3k\, F^2(k, g_0)}{(\hat{\omega} - m_v)(\hat{\omega} - z)}\right] \tag{8}$$

über (siehe C (5)).

Diese Funktion $h(z)$ hat auch genau dasselbe analytische Verhalten wie $\underline{h}(z)$, wovon man sich leicht überzeugt. Außerdem ist

$$\lim_{\epsilon \to 0} h(x \pm i\epsilon)$$

$$= (x - m_v)\left[1 + P\int \frac{d^3k\, F^2(k, g_0)}{(\hat{\omega} - m_v)(\hat{\omega} - x)}\right] \tag{9}$$

$$\pm \pi i\, 4\pi |k_0|\, \omega_0\, F^2(k_0, g_0)\, \Theta(x - m_N - \mu)$$

$$= h(x) \pm i\Gamma(x)$$

wo

$$h(x) = (x - m_v)\left[1 + P\int \frac{d^3k\, F^2(k, g_0)}{(\hat{\omega} - m_v)(\hat{\omega} - x)}\right] \tag{10}$$

$$\Gamma(x) = 4\pi^2 |k_0|\, \omega_0\, F^2(k_0, g_0)\, \Theta(x - m_N - \mu) \tag{11}$$

$$x = m_N + \omega_0 = m_N + \sqrt{k_0^2 + \mu^2}$$

ist.

Anhang 2

Gültigkeit der Laplace Umkehrtransformation

Die Laplace Transformierte von einer Funktion $\alpha(t)$ ist

$$\alpha(E) = \int_0^\infty e^{-Et}\, \alpha(t)\, dt \tag{1}$$

wobei

$$Re\ E > 0 \tag{2}$$

und $\alpha(t) = 0$ für $t < 0$.

Nun ist die Laplace Umkehrtransformation gegeben durch

$$\alpha(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{Et}\, \alpha(E)\, dE \tag{3}$$

Damit die rechte Seite von (3) existiert, ist es hinreichend, daß $\alpha(E)$ die folgenden Bedingungen erfüllt:

a) Die Funktion $\alpha(E)$ soll eine in der ganzen Halbebene eindeutige analytische Funktion von $E = \sigma + i\tau$ sein; $\sigma > 0$

b) Für $\sigma > \sigma_0$ besitzt $\alpha(E) - \frac{a}{iE}$ (a ist eine beliebige komplexe Zahl) eine Majorante $\Omega(|\tau|)$, d. h.

$$\Omega(|\tau|) \geq \left| \alpha(\sigma+i\tau) - \frac{a}{iE} \right| \geq \left| \alpha(\sigma+i\tau) \right| - \left| \frac{a}{\tau - i\sigma} \right|$$

und für die das Integral $\int_0^\infty \Omega(\tau)\, d\tau$ eventuell im Sinne des Hauptwertes existiert.

Dann gilt automatisch die Beziehung (1).

Um die Existenz von $\alpha(t)$ zu zeigen, genügt es, wenn $\alpha(E)$ gegeben ist, $\alpha(t)$ von (3) abzuschätzen.

$$|\alpha(t)| \leq \frac{1}{2\pi} e^{\sigma t} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\tau t} \alpha(\sigma+i\tau)\, d\tau \right|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} e^{\sigma t} \Bigg[\int_{0}^{\infty} \left| \alpha(\sigma+i\tau) - \frac{a}{\tau - i\sigma} \right| d\tau + \int_{0}^{\infty} \left| \alpha(\sigma-i\tau) - \frac{a}{-\tau - i\sigma} \right| d\tau + \left| a \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\tau t}}{\tau - i\sigma}\, d\tau \right| \Bigg] \qquad (4)$$

Die Integration $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\tau t}}{\tau - i\sigma}\, d\tau$ kann man leicht auswerten. Für $t > 0$ ist

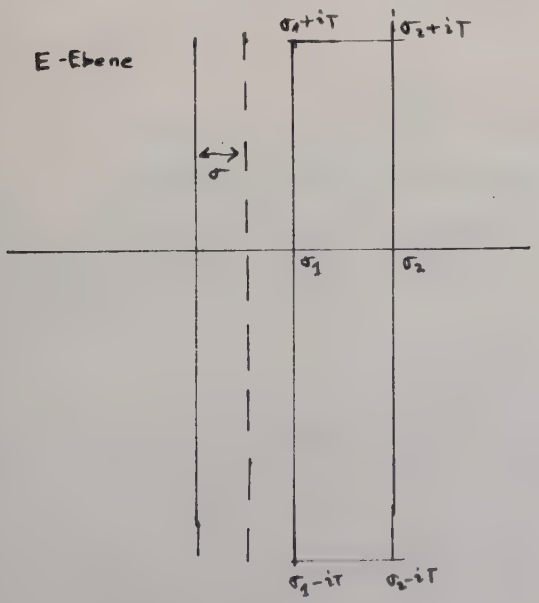
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\tau t}}{\tau - i\sigma}\, d\tau = 2\pi i\, e^{-\sigma t} \qquad (5)$$

Daraus folgt

$$|\alpha(t)| \leq \frac{1}{2\pi} e^{\sigma t} \int_{0}^{\infty} \Omega(\tau)\, d\tau + |a| \qquad (6)$$

Das heißt, für festes t ist $|\alpha(t)|$ bestimmt beschränkt.

Daß die Funktion $\alpha(t)$ nicht von σ abhängt, kann man folgendermaßen zeigen. Man wählt in der E-Ebene einen Weg, was im nebenstehenden Bild gezeigt wird. Das Rechteck liegt an der rechten Seite der Geraden $x = \sigma$.



Das Integral von dem Punkt

$\sigma_1 + iT$ bis $\sigma_2 + iT$

$$\int_{\sigma_2+iT}^{\sigma_1+iT} e^{Et} \alpha(E)\, dE = -\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} e^{\sigma+iT} \alpha(\sigma+iT)\, d\sigma$$

kann man direkt abschätzen. Wir brauchen hier nur die folgende Ungleichung zu berücksichtigen

$$\Omega(|\tau|) \geq |\alpha(\sigma+i\tau)| - \left|\frac{a}{\tau - i\sigma}\right|$$

aus der

$$\Omega(|\tau|) + \left|\frac{a}{\tau - i\sigma}\right| \geq |\alpha(\sigma + i\tau)| \tag{7}$$

folgt.

Wenn wir (7) für unsere Abschätzung benutzen, erhalten wir

$$\left| \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} e^{(\sigma+i\tau)t}\, \alpha(\sigma+i\tau)\, d\sigma \right| \leq e^{\sigma_2 t} \left[\Omega(|\tau|) + \left|\frac{a}{\tau - i\sigma_2}\right|\right](\sigma_2 - \sigma_1) \tag{8}$$

Wegen der Existenz des Integrals $\int_0^\infty \Omega(\tau)\, d\tau$ muß es nämlich eine Folge von Werten $\tau_1, \tau_2 \cdots$ geben, für welche $\Omega(|\tau|)$ gegen Null strebt. Das heißt, für festes t und σ_2 strebt die Majorante von (8) gegen Null. Gleichfalls kann man zeigen, daß die Integration von $\sigma_1 - i\tau$ bis $\sigma_2 - i\tau$ Null ergibt.

Daraus folgt sofort wegen des Cauchy'schen Integralsatzes

$$\lim_{T \to \infty} \int_{\sigma_1 - iT}^{\sigma_1 + } e^{Et}\, \alpha(E)\, dE = \lim_{T \to \infty} \int_{\sigma_2 - iT}^{\sigma_2 + iT} e^{Et} \alpha(E)\, dE$$

das heißt, für $t > 0$, $\alpha(t)$ ist unabhängig von σ .

Die Gleichung (3) können wir schreiben

$$\alpha(t)\, e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(\sigma - i\tau) e^{-i\tau t}\, d\tau \tag{9}$$

Nun ist $\alpha(t)\, e^{-\sigma t}$ die Fourierische Transformierte zu der in τ sicherlich glatten Funktion $\varphi(\sigma - i\tau)$. Wegen der Konvergenz des Integrals $\int_{-\infty}^{+\infty} |\alpha(\sigma - i\tau)|\, d\tau$ (Bedingung b)) gilt die Fourierische Umkehrtransformation

$$\alpha(\sigma - i\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(t)\, e^{-\sigma t}\, e^{i\tau t}\, dt$$

D. h.

$$\alpha(E) = \int_0^\infty \alpha(t)\, e^{-Et}\, dt \tag{10}$$

Wir zeigen jetzt, daß unsere $\alpha(E,\vec{p})$ den Bedingungen a) und b) genügen. Nun ist (Gleichung C 12)

$$\alpha(E,\vec{p}) = i\,\frac{\alpha_0(\vec{p}) + D(iE)}{h(iE)} \tag{11}$$

Diese Funktion ist sicher analytisch für $\sigma > 0$, weil $h(z)$ überall für komplexe z $[\mathrm{Im}\, z \neq 0]$ analytisch ist. Damit ist a) bewiesen.

Daß der erste Summand der Bedingung b) genügt, folgt folgendermaßen:

$$\left| \frac{\alpha_0(\vec{p})}{h(iE)} - \frac{\alpha_0(\vec{p})}{iE} \right| = |\alpha_0(\vec{p})| \left| \frac{iE - iE + m_\nu - (iE - m_\nu) \int \frac{d^3k\, F^2(\vec{k},g_0)}{(\hat{\omega} - iE)(\hat{\omega} - m_\nu)}}{iE\,(iE - m_\nu)\left[1 + \int \frac{d^3k\, F^2(\vec{k},g_0)}{(\hat{\omega} - iE)(\hat{\omega} - m_\nu)}\right]} \right| \tag{12}$$

Wir schreiben

$$\frac{F^2(\vec{k},g_0)}{\hat{\omega} - m_\nu} = T(\vec{k},g_0) \tag{13}$$

und

$$\sigma + i\tau = E$$

Dann ist

$$K = \left| \frac{\alpha_0(\vec{p})}{h(iE)} - \frac{\alpha_0(\vec{p})}{iE} \right| \leq \frac{m_\nu + |\tau + m_\nu - i\sigma| \int \frac{d^3k\, T(\vec{k},g_0)}{|\hat{\omega} + \tau - i\sigma|}}{|-\tau + i\sigma|\, |\tau + m_\nu - i\sigma|\, |h(-\tau + i\sigma)|} \tag{14}$$

$$\leq \frac{m_\nu + \dfrac{|\tau + m_\nu - i\sigma|}{|m_N + \mu + \tau - i\sigma|} \cdot A}{|-\tau + i\sigma|\, |\tau + m_\nu - i\sigma|\, |h(z_0)|} \tag{15}$$

wobei wir sagen, daß das Minimum von $\mathcal{R}(-\tau+i\sigma)$ für $\sigma>0$ an der Stelle $z_0 = -\tau_0+i\sigma$ liegt und $A = \int d^3k\, T(k,g_0)$ ist.

Wenn wir

$$\Omega(\tau) = \frac{m_v}{\sqrt{\tau^2+\sigma^2}\,(\tau+m_v)\,|\mathcal{R}(z_0)|} + \frac{A}{\sqrt{\tau^2+\sigma^2}\,(\tau+m_v)\,|\mathcal{R}(z_0)|} \tag{16}$$

setzen,

ist

$$\int_0^\infty \Omega(\tau)\, d\tau < \infty$$

Ähnlich kann man für den zweiten Summanden zeigen, daß er die Bedingungen a) und b) erfüllt.

Die Argumente dafür, daß $\varphi(k,\beta;\varepsilon)$ auch den Bedingungen a) und b) genügt, sind entsprechend.

Anhang 3

Beschränktheit der Funktionen $f_i(x)$

Die Funktionen $f_i(x)$ sind definiert durch

$$f_r(x) = \frac{\Gamma(x)}{h^2(x) + \Gamma^2(x)} \tag{1}$$

$$f_h(x) = \frac{h(x)}{h^2(x) + \Gamma^2(x)} \tag{2}$$

für das Intervall $(m_N + \mu, \infty)$.

$f_r(x)$ wäre unbeschränkt, wenn entweder

a) $h^2(x) + \Gamma^2(x) = 0$ oder b) $\Gamma(x) = \infty$ ist.

1. Die Bedingung a) kann nur erfüllt sein, wenn gleichzeitig $h(x) = \Gamma(x) = 0$ ist, was in dem Intervall $(m_N + \mu, \infty)$ nicht der Fall ist.

2. Strebt $\Gamma(x) \longrightarrow \infty$, dann ist

$$|f_r(x)| < \frac{1}{|\Gamma(x)|}$$

was gegen Null geht.

Daraus folgt, $f_r(x)$ ist bestimmt beschränkt. Genau dasselbe Argument ist auch für $f_h(x)$ gültig.

LITERATURVERZEICHNIS

1 T. D. Lee: Phys. Rev. 95 (1954) 1329

2 G. Källèn und W. Pauli:
Dan. Mat. Fys. Medd. 30 (1955) No. 7

3 S. Weinberg: Phys. Rev. 102 (1956) 285

4 K. E. Ford: Phys. Rev. 105 (1957) 320

5 W. Heisenberg: Nuclear Physics 4 (1957) 532; 5 (1958) 195

6 V. Glaser und G. Källèn:
Nuclear Physics 2 (1956) 706

7 H. Araki, Y. Munikata und M. Kawaquchi:
Progr. Theor. Phys. 17 (1957) 419

T. Okabayashi und S Sato:
Progr. Theor. Phys. 17 (1957) 30

K. Naito: Progr. Theor. Phys. I 18 (1957) 300;
II 18 (1957) 615

8 J. M. Jauch: Helv. Phys. Acta 31 (1958) 661

9 G. Grawert und J. Petzold:
Preprint (1959)

10 J. M. Cook: Journ. Math. Phys. 36 (1957) 82

11 Møller und Belinfante:
Dan. Mat. Fys. 28 Nr. 6 (1954)

12 G. Källèn: CERN Publication 57-43 (1957)

13 E. T. Whittaker und G. Watson:
Modern Analysis (1950) p. 172

LEBENSLAUF

Am 1. Januar 1933 wurde ich, Abdul Latif CHOUDHURY, als Sohn des Dozenten Abdur Rub Choudhury und seiner Ehefrau Umme Arefa Khatun in Dacca, Ost Pakistan, geboren.

Ich besuchte die St. Gregory's High School in Dacca. Im Jahre 1948 machte ich meine Schul-Abschluß-Prüfung (High School Examination). 1950 bestand ich meine "Intermediate of Science"-Prüfung am Sylhet Govt. College. Danach begann ich das Studium der Physik an der Universität von Dacca, erwarb 1953 den "Bachelor of Science with Honours) und beendete 1954 mein Studium in Dacca mit dem "Master of Science".

Anschließend war ich sechs Monate als Assistent am Lehrstuhl für Physik in Dacca tätig.

1955 erhielt ich ein Stipendium des Deutschen Akademischen Austauschdienstes. Ich studierte ein Semester in Göttingen und ging dann nach Berlin. Hier begann ich die vorliegende Doktorarbeit unter Anleitung von Prof. Ludwig.

Abdul Latif Choudhury